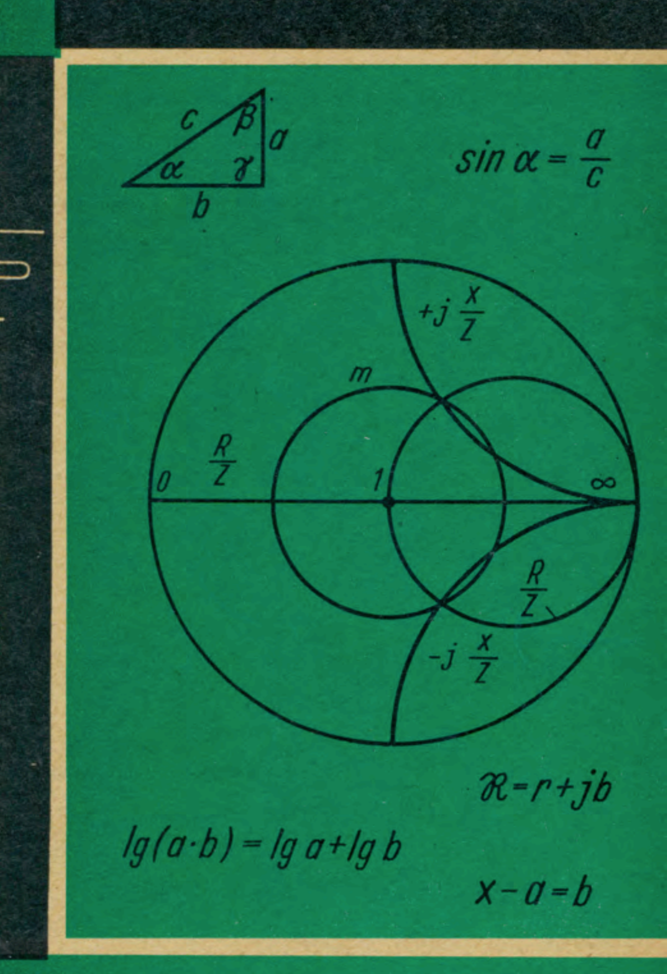
76

DER PRAKTISCHE FUNKAMATEUR



Otthermann Kronjäger

Mathematik für den Funkamateur

Der praktische Funkamateur · Band 76

Mathematik für den Funkamateur

OTTHERMANN KRONJÄGER

Mathematik für den Funkamateur



DEUTSCHER MILITÄRVERLAG

Redaktionsschluß: 20. Januar 1968

Inhalt

Vorwort

Beim Studium der Fachliteratur wird der Funkamateur immer wieder mathematische Beziehungen finden, die auch für die Amateurpraxis von Bedeutung sind. Die notwendigen Rechenoperationen erfordern aber, daß Formeln umgestellt und Kommastellen festgelegt werden müssen. Darüber hinaus erfordert die Lösung bestimmter Aufgaben z. B. das Rechnen mit Potenzen oder Wurzeln, Logarithmen bzw. komplexen Zahlen. In der Broschüre sind diese mathematischen Probleme in verständlicher Form dargestellt. Die vielen Beispiele werden dem Amateur helfen, die mathematischen Zusammenhänge besser zu verstehen und analoge Aufgaben aus seinem Bereich schneller zu lösen.

Leipzig, im Dezember 1967 *Otthermann Kronjäger*

1. Potenzen und Wurzeln

Nicht selten kommt es vor, daß der weniger erfahrene Funkamateur bei seinen Rechenoperationen Schwierigkeiten hat, die Kommastellen festzulegen. Durch Rechenverfahren mit Potenzen lassen sich die genannten Schwierigkeiten leicht überwinden. Aus diesem Grunde sei zunächst ein Einblick in die Potenzrechnung gegeben.

1.1. Potenzen

Hat man n Faktoren a

$$a \cdot a \ldots a, \tag{1}$$

so kann man derartige Produkte in kürzerer Form

$$a^n \tag{2}$$

schreiben. Mit Gl. (2) wäre demnach $n = 3$. In der Potenzschreibweise nennt man a die Grundzahl oder Basis und n die Hochzahl oder den Exponenten. Der Wert einer Potenz hängt von der Grundzahl sowie vom Exponenten ab. In Bild 1 ist die Potenz als Funktion der Grundzahl mit verschiedenen Exponenten dargestellt. In der Technik des Amateurs trifft man sehr oft für a den Wert 10 an, die sogenannte 10er-Potenz. Nun einige allgemeine Potenzen:

$$a^0 = 1 \qquad 1^n = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^\infty = z \tag{3}$$

Daraus ergibt sich:

- Jede Grundzahl mit Null potenziert ergibt immer 1.
- Eine Grundzahl 1 mit n potenziert ergibt 1 (n zwischen 0 und ∞).
- Die mit 1 potenzierte Grundzahl a ergibt a.
- Die mit unendlich potenzierte Grundzahl ergibt $z = 0$, wenn $a < 1$; $z = 1$, wenn $a = 1$; $z = \infty$, wenn $a > 1$.

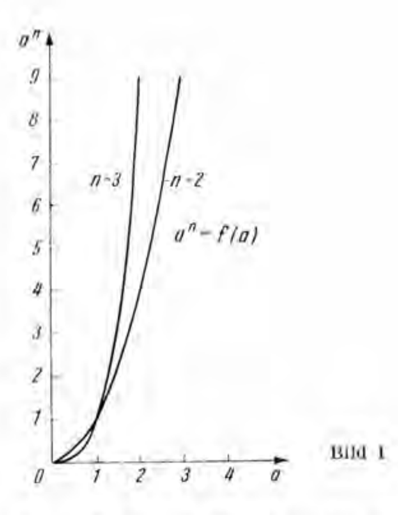


Bild 1

Ist die Basis einer Potenz negativ, so erhält man ein positives Ergebnis, wenn ein gerader Exponent vorliegt (z. B. $n = 2$). Dagegen wird bei ungeraden Exponenten (z. B. $n = 3$) das Ergebnis negativ.

1.1.1. Multiplikation von Potenzen

Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man deren Exponenten addiert, also die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{4}$$

Potenzen mit gleichen Exponenten, aber verschiedenen Basen potenziert man, indem die Basen miteinander multipliziert und dann mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert werden:

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n \tag{5}$$

Eine Potenz wird potenziert, wenn man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{6}$$

1.1.2. Potenzen mit negativen Exponenten

Der Kehrwert einer Potenz mit negativem Exponenten wird in eine Potenz mit positivem Exponenten verwandelt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n \tag{7}$$

Potenzen mit gleicher Basis, aber positiven und negativen Exponenten haben als gemeinsamen Exponenten die Differenz der Exponenten:

$$a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} \tag{8}$$

Sind die Exponenten mehrerer Potenzen mit gleichen Basen negativ, so gilt ähnliches wie in Gl. (4) und Gl. (7):

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}} \tag{9}$$

Ferner ist:

$$(a^n)^{-m} = a^{-mn} = \frac{1}{a^{mn}} \tag{10}$$

$$(a^{-n})^{-m} = a^{mn} \tag{11}$$

1.1.3. Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis dividiert man, indem die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert wird:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ wenn } n > m \quad \text{und}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ wenn } m > n \tag{12}$$

Potenzen mit gleichen Exponenten, aber ungleichen Basen als Quotienten werden potenziert, indem man die Potenzen getrennt berechnet und das Ergebnis dividiert:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{13}$$

1.1.4. Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Wurzeln kann man als Potenzen mit gebrochenen Eponenten darstellen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \tag{14}$$

Des weiteren gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{u}{v}} \tag{15}$$

Es gelten die gleichen Beziehungen wie bei Potenzen mit ganzen Exponenten. Das wird deutlich, wenn man beispielsweise $\frac{m}{n} = z$ setzt.

1.1.5. Binomischer Lehrsatz

Durch Anwendung dieses Satzes ist man in der Lage, Summen oder Differenzen zu potenzieren. Auf eine Ableitung des Satzes muß verzichtet werden. Will man $(a \pm b)^n$ potenzieren, so gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{16}$$

Für den ersten Augenblick mag Gl. (16) etwas verwirrend aussehen. Deshalb sollen die Begriffe erläutert werden. Das Summenzeichen Σ heißt: Summe aller (aller Summanden). Der Klammerausdruck bedeutet n über k, eine abgekürzte Schreibweise für:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \tag{17}$$

Das Zeichen n! nennt man Fakultät, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Erwähnenswert dazu ist, daß $\binom{n}{0} = 1$ ergibt. An Hand der folgenden Beispiele wird die Anwendung des Satzes erklärt:

$(a + b)^2$

Ist $k = 0$, dann wird $\binom{2}{0} = 1$ und $a^{2-0}\,b^0 = a^2$,
also der erste Summand damit a^2.

Ist $k = 1$, dann ergibt $\binom{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{(2-1)!\,1} = 2$ und $a^{2-1}\,b^1 = ab$,
der zweite Summand $2\,ab$.

Ist $k = 2$, dann wird $\binom{2}{2} = 1$ und $a^{2-2}\,b^2 = b^2$,
der dritte Summand b^2.

Man geht nicht weiter wie $n = k$:

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$.

$(a + b)^3$

$k = 0\ \binom{3}{0} = 1\ a^{3-0}\,b^0 = a^3$, der erste Summand a^3;

$k = 1\ \binom{3}{1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(3-1)!\,1} = 3\ a^{3-1}\,b^1 = a^2 b$,
der zweite Summand $3\,a^2 b$;

$k = 2\ \binom{3}{2} = 3 \quad a^{3-2}\,b^2 = ab^2$, der dritte Summand $3\,ab^2$;

$k = 3\ \binom{3}{3} = 1 \quad a^{3-3}\,b^3 = b^3$, der letzte Summand b^3;

somit wird:

$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$.

Ersetzt man b durch $-\,b$, so erhält man aus Gl. (16) die Berechnung von $(a - b)^n$. Schließlich ergibt sich $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

1.2. Wurzeln

Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Potenzierens. Hat man

$$a = \sqrt[n]{b}\,, \tag{18}$$

so sind a der Wurzelwert, b der Radikand und n der Wurzelexponent. Man sagt, a ist die n-te Wurzel von b. Dabei wird vorausgesetzt, daß b eine positive Zahl ist. Es ist schon erklärt worden, daß man Wurzeln als Potenzen schreiben kann. Eine in der Amateurtechnik oft vorkommende Wurzel ist die soge-

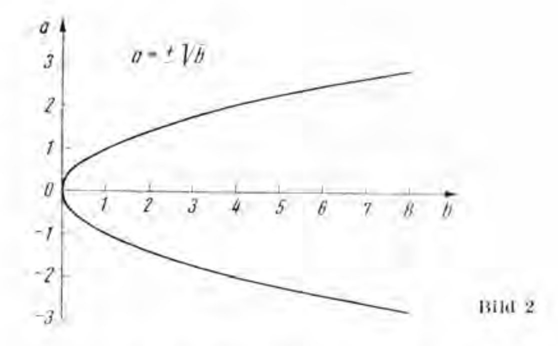


Bild 2

nannte Quadratwurzel mit n = 2. Für diesen Fall schreibt man die 2 an der Wurzel nicht. Bild 2 läßt erkennen, daß zu jedem b-Wert zwei a-Werte gehören, wenn n = 2 ist (sowohl $-a^2$ wie $+a^2$ ergeben den gleichen b-Wert); die Quadratwurzel hat also eine zweideutige Aussage. Allgemein gilt deshalb: Für gerades n ist der Wurzelwert sowohl positiv wie negativ, für ungerades n hat der Wurzelwert das gleiche Vorzeichen wie der Radikand.

1.2.1. Addition und Subtraktion von Wurzeln

Eine Addition und Subtraktion von Wurzeln ist nur dann zugelassen, wenn diese gleiche Wurzelexponenten und gleiche Radikanden haben:

$$\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} = 2\sqrt[3]{b}$$

und

$$\sqrt{b} - 0{,}5\sqrt{b} = 0{,}5\sqrt{b} \qquad (19)$$

1.2.2. Multiplikation und Division von Wurzeln

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten multipliziert man, indem die Radikanden multipliziert werden. Aus diesem Produkt ist dann die Wurzel zu ziehen:

$$\sqrt[n]{d} \cdot \sqrt[n]{e} = \sqrt[n]{d \cdot e} \qquad (20)$$

Haben die Wurzeln gleiche Radikanden, aber verschiedene Wurzelexponenten, so gilt:

$$\sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{b^{m+n}} \tag{21}$$

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten sind so zu dividieren, daß die Radikanden dividiert werden und aus diesem Quotienten die Wurzel gezogen wird:

$$\frac{\sqrt[n]{d}}{\sqrt[n]{e}} = \sqrt[n]{\frac{d}{e}} \tag{22}$$

Sind die Radikanden der zu dividierenden Wurzeln gleich, aber die Wurzelexponenten sind verschieden, dann gilt:

$$\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m-n]{b^{m-n}} \tag{23}$$

1.2.3. Potenzieren und Radizieren von Wurzeln

Der Vollständigkeit halber sei nochmals erwähnt, daß

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m}$$

und (24)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[m \cdot n]{b} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}$$

ist (s. Abschnitt 1.1.4.).

1.2.4. Berechnen von Wurzeln

In der Amateurpraxis berechnet man Wurzeln meistens mit dem Rechenschieber. Wie noch gezeigt wird, kann man mit Hilfe von Logarithmen noch genauere Ergebnisse erzielen. Darüber hinaus gibt es Tabellen von Quadratzahlen und von deren Wurzelwerten. Der Umfang dieser Broschüre gestattet es nicht, das direkte Berechnen von Quadratwurzeln zu be-

handeln. Im folgenden Abschnitt sind Näherungsberechnungen von Wurzeln angegeben, die in vielen Fällen ein ausreichendes Ergebnis bringen.

1.2.5. Näherungen

$$\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2\,a} \qquad \text{für } b \ll a\,; \tag{25}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx 0{,}96\,a + 0{,}4\,b \quad \text{für } a > b\,;$$

$$\sqrt[3]{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{3\,a^2}\,; \tag{26}$$

$$\sqrt{1 \pm b} \approx 1 \pm 0{,}5\,b\,;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm b}} \approx 1 \mp 0{,}5\,b \quad \text{für } b < 0{,}05\,. \tag{27}$$

Weitere Näherungen für $1 \gg x \geqq 0$:

$$(1 \pm x)^2 \approx 1 \pm 2\,x \qquad (1 \pm x)^3 \approx 1 \pm 3\,x$$

$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x \qquad \frac{1}{(1 \pm x)^2} \approx 1 \mp 2\,x \tag{28}$$

$$\frac{1 \pm x}{1 \mp x} \approx 1 \pm 2\,x \qquad \frac{1}{1 + x^2} \approx 1$$

1.3. Zehnerpotenzen

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß es sehr zweckmäßig ist, wenn der Amateur bei seinen Berechnungen mit Zehnerpotenzen operiert. Aus diesem Grund werden im folgenden eine Anzahl immer wieder vorkommender Potenzen mit ihren Abkürzungen angegeben.

Tabelle 1 Vorsätze zur Bildung von Vielfachen und Teilen von Einheiten

Tera	T	1000000000000 = 10^{12}	Einheiten
Giga	G	1000000000 = 10^{9}	Einheiten
Mega	M	1000000 = 10^{6}	Einheiten
Kilo	k	1000 = 10^{3}	Einheiten
Hekto	h	100 = 10^{2}	Einheiten
Deka	da	10 = 10^{1}	Einheiten
Dezi	d	0,1 = 10^{-1}	Einheiten
Zenti	c	0,01 = 10^{-2}	Einheiten
Milli	m	0,001 = 10^{-3}	Einheiten
Mikro	μ	0,000001 = 10^{-6}	Einheiten
Nano	n	0,000000001 = 10^{-9}	Einheiten
Pico	p	0,000000000001 = 10^{-12}	Einheiten
Femto	f	0,000000000000001 = 10^{-15}	Einheiten
Atto	a	0,000000000000000001 = 10^{-18}	Einheiten

Beispiel 1

$$b^4 + 2\,b^4 + 3\,b^4 = b^4\,(1 + 2 + 3) = 6\,b^4$$

Beispiel 2

Dazu Gl. (4), Gl. (5), Gl. (6).

$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)\,(2 \cdot 2) = 2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6 = 64$$

$$3^3 \cdot 2^3 \cdot 6^3 = (3 \cdot 2 \cdot 6)^3 = (6^2)^3 = 6^6 = 4{,}66 \cdot 10^4$$

$$12\,a^2\,b \cdot 5\,ab^2 \cdot 21\,abc = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7\,(a^4)\,b^3\,c$$
$$= 12{,}6 \cdot 10^2\,a^4\,b^4\,c$$

Beispiel 3

Hierzu die Gl. (7) bis Gl. (12).

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} \qquad \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$10^{10} \cdot 10^{-6} = 10^{10-6} = 10^4 = \frac{10^{10}}{10^6}$$

$$10^0 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 10^{-(1+2+3)} = 10^{-6} = \frac{1}{10^6}$$

$$\left(\frac{10}{100}\right)^{10} = \left(\frac{10^1}{10^2}\right)^{10} = (10^{1-2})^{10} = (10^{-1})^{10} = 10^{-10} = \frac{1}{10^{10}}$$

$$\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4}{7 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^1 \cdot 10^{-1} \cdot 4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2{,}5}{7 \cdot 9 \cdot 4} \cdot \frac{10^{(3-3+4)}}{10^{(6+1-1)}} \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

Beispiel 4

Hierzu Gl. (13), Gl. (14).

$$\sqrt{a} \cdot a^{1/2} = a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{(1/2+1/2)} = a$$
$$y^{2/3} \cdot y^{5/6} = y^{(2/3+5/6)} = y^{1,5}$$
$$\sqrt{x} \cdot x^{-1/2} = x^{1/2} \cdot x^{-1/2} = x^{(1/2-1/2)} = x^0 = 1$$
$$(p^{20})^{1/5} = p^{20/5} = p^4$$
$$(2^{1/2} + 4^{1/2})(18^{1/2} - 9^{1/2}) = 36^{1/2} - 18^{1/2} + 72^{1/2} - 36^{1/2}$$
$$= 54^{1/2} = (3^2)^{1/2} \cdot (2 \cdot 3)^{1/2} = 3 \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot (\pm 2{,}45)$$

Beispiel 5

Hierzu die Gl. (21) bis Gl. (23).

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 5} = \pm 7{,}73$$

$$\sqrt{100} \cdot \sqrt[3]{100} = \sqrt[6]{100^5} = \sqrt[6]{10^{10}} = \sqrt[6]{10^6} \cdot \sqrt[6]{10^4}$$
$$= 10 \cdot 10^{4/6} = 10 \sqrt[3]{10^2} \approx 46{,}5$$

$$\frac{\sqrt{10^2}}{\sqrt{10^4}} = \sqrt{\frac{10^2}{10^4}} = \sqrt{10^{-2}} = \pm 10^{-1} = \pm 0{,}1$$

Beispiel 6

Hierzu Gl. (25).

$$\sqrt{2505} = \sqrt{2500 + 5} = 50 + \frac{5}{100} \approx \pm 50{,}05$$

$$\sqrt{426} = \sqrt{420 + 6} = 20{,}5 + \frac{6}{41} \approx \pm 20{,}647$$

2. Logarithmen

Mit Hilfe der Logarithmen kann man viele Probleme der Mathematik wesentlich leichter bewältigen. Für den Amateur bedeutet das: Anwenden der Logarithmen beim Wurzelziehen, Potenzieren (besonders mit gebrochenen Exponenten) — unter Benutzung des Rechenschiebers. Was versteht man unter logarithmieren?

Logarithmieren bedeutet, daß zu einer gegebenen Potenz c und ihrer Grundzahl a der Exponent b zu suchen ist. Anders gesagt: Der Logarithmus b einer Zahl c für die Basis a ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muß, um die natürliche Zahl c (den Numerus) zu erhalten. In eine Formel geschrieben, ergäbe sich:

$$b = \log^{a} c \tag{29}$$

Es ist in diesem Fall nur von Bedeutung, daß mit der Grundzahl a = 10, dem sogenannten Briggschen oder dekadischen, und mit a = 2,718 = e, dem natürlichen Logarithmus, gerechnet wird. Beide Systeme sind durch die folgende Beziehung:

$$\lg c = 0{,}4343 \ln c \tag{30}$$

$$\ln c = 2{,}3026 \lg c$$

miteinander verbunden. Entsprechend der Vereinbarung schreibt man für den dekadischen Logarithmus „lg" und für den natürlichen Logarithmus „ln". Die Genauigkeit der Rechenergebnisse beim Logarithmieren wird von der Stelle der Mantisse b beeinflußt. Die entsprechenden Logarithmentafeln gestatten es, b in 3, 4 usw. Stellen abzulesen. Wenn also beim dekadischen Logarithmus a = 10 ist und man von der natürlichen Zahl 10 (dem Numerus) die Mantisse nennen soll, dann ergibt sich gemäß Gl. (29) lg 10 = 1. Demnach ist der Exponent 1, denn potenziert man die Basis 10 mit der Mantisse 1,

so erhält man die natürliche Zahl 10 ($10^1 = 10$). Dagegen ergibt sich beim natürlichen Logarithmus auch bei der Mantisse 1 die natürliche Zahl 2,718, wenn ln 2,718 = 1.

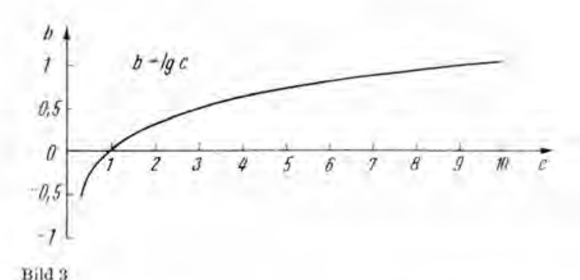


Bild 3

Bild 3 zeigt die Funktion b = lg c. Je weiter man die Ordinate auseinanderzieht, um so genauer läßt sich die Mantisse b feststellen. Mit guter Näherung ist beispielsweise für die Zahl 2 ≙ b = 0,3. Die Stellenzahl beim Logarithmus wird nicht durch ein Komma, sondern durch einen Punkt gekennzeichnet. Jeder Logarithmus setzt sich zusammen aus der vor dem Punkt stehenden ganzen Zahl (der Kennziffer k) und der hinter dem Punkt stehenden Mantisse. Die Kennziffer des dekadischen Logarithmus einer ganzen Zahl ist um 1 *kleiner* als die Anzahl der Ziffern dieser Zahl. Beispielsweise ist die Kennziffer jeder

— 1ziffrigen Zahl 0,

— 2ziffrigen Zahl 1,

— 3ziffrigen Zahl 2 usw.

Eine negative Kennziffer zeigt, an welcher Stelle nach dem Komma der natürlichen Zahl die Ziffern beginnen (—1 ≙ 0,1; —2 ≙ 0,01; —3 ≙ 0,001 usw.). Die Mantisse gibt den Logarithmus des Numerus ohne Berücksichtigung des Stellenwerts an. Die Mantissen der Zahlen sind also gleich (z. B. von 6,3 ≙ 0.8 oder 63 ≙ 0.8 usw.). Nachstehend eine Aufstellung, die die vorstehende Erklärung vervollständigt.

Numerus	Kennziffer
1	0
10	1
100	2
1000	3
0,1	−1
0,01	−2
0,001	−3

Für $c = 5$ ergibt sich $\lg 5 = 0.7$; wenn $c = 50$, so wird $\lg 50 = 1.7$; für $c = 0{,}05$ ist $\lg 0{,}05 = 0.7 - 2$ (die Ziffer beginnt 2 Stellen nach dem Komma).

Die wichtigsten Logarithmengesetze lauten:

- Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren:

$$\lg (A \cdot B) = \lg A + \lg B \tag{31}$$

- Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden und des Divisors:

$$\lg \frac{A}{B} = \lg A - \lg B \tag{32}$$

- Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt, gebildet aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis:

$$\lg d^n = n \cdot \lg d \tag{33}$$

- Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten, gebildet aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten:

$$\lg \sqrt[n]{d} = \frac{1}{n} \lg d \tag{34}$$

2.1. Anwendung der Logarithmentafel

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß die Mantissen in Logarithmentafeln angegeben werden. Je größer die Stellenzahl der Mantissen ist, um so genauer läßt sich der Logarithmus eines Numerus feststellen. Beispielsweise enthält eine 5stellige Tafel den Numerus von 0 bis 1000. Da die Mantisse unabhängig von der Stellenzahl des Numerus ist, kann man auch die Logarithmen über 1000 ermitteln (z. B. mit der 5stelligen Tafel). Nähere Erläuterungen dazu findet der Leser in den folgenden Beispielen. Auf der linken Seite der Logarithmentafel ist der Numerus aufgetragen. Zwischenwerte des Numerus von 0 bis 9 sind aus danebenliegenden Spalten ersichtlich. Stimmt der Zahlenwert des Numerus nicht genau mit dem in der Tafel überein, da die Stellenzahl der Mantissen nicht ausreicht, so kann man durch lineare Interpolation teilweise die Ungenauigkeiten in der Angabe der Mantisse ausgleichen. Für die folgenden Beispiele wird eine 5stellige Tafel vorausgesetzt.

Beispiel 7

Ermittle den Logarithmus von 935!
Man sucht in der linken äußeren Spalte der Logarithmentafel zum Numerus die Mantisse, sie beträgt 0.97081.
Gemäß den Erläuterungen ist die Kennziffer k = Stellenzahl des Numerus —1, also in diesem Fall k = 2.
Der Logarithmus von 935 ist damit 2.97081.

Beispiel 8

Welchen Wert hat der Logarithmus des Numerus 2,24?
Da die Mantissen ohne Berücksichtigung der Stellenzahl des Numerus gelten, wäre es prinzipiell gleich, ob man vom Numerus 2,24; 22,4 oder 224 ausgeht. Es sollte jedoch die Tabelle der Logarithmentafel benutzt werden, die es gestattet, den höchsten Zahlenwert des Numerus noch ohne Berücksichtigung seiner Stellenzahl abzulesen. Nachstehend sind die 3 Möglichkeiten zur 5stelligen Logarithmentafel erläutert.

Die Logarithmentafel läßt den genauen Ablesewert für 2,24 nicht zu, da es lediglich die Spalte 2,2 oder 2,3 gibt. Der Zwischenwert 2,24 ist nur durch Interpolation zur Feststellung der Mantisse möglich. Dazu liest man die Mantisse zum Numerus 2, 3 $\triangleq$ 0.36173 und 2.2 — 0.34242 ab. Die Differenz beider Werte ist 1931. Die Differenz 1931 dividiert man durch 10 und multipliziert diesen Wert mit der letzten Zahl des Numerus (in diesem Fall mit 4); $193{,}1 \cdot 4 = 774$. Addiert man jetzt diesen Wert zu der Mantisse von 2,2, so hat man die gleiche von 2,24 — 0.34242 + 773 = 0.35015. In einer Formel zusammengefaßt, ergibt sich der Zahlenwert bei der Interpolation als

$$z' = \frac{\text{Differenz der Mantissen}}{10} \cdot \text{p-fache der Zahl.}$$

Wird aber statt 2,24 die Zahl 22,4 gewählt, so ist keine Interpolation notwendig; man findet 0.35025. Da 2,24 unter 10 liegt, erhält man für die Zahl 2,24 den Numerus 0.35025. Verglichen mit der oben festgestellten Mantisse, ist ein geringer Unterschied vorhanden, der aber in vielen Fällen nicht ins Gewicht fallen dürfte.

Geht man von 224 aus, so erhält man für die Mantisse ebenfalls 0.35025. Das Beispiel läßt erkennen, daß die Mantisse zum Numerus dort aufgesucht wird, wo es die Logarithmentafel noch zuläßt.

Beispiel 9

Wie groß ist der Logarithmus von 15425?

Die Logarithmentafel reicht nur bis zum Numerus 1000. Es sei nochmals erwähnt, daß die Mantisse unabhängig ist von der Stellenzahl des Numerus. Bei 154,2 erhält man aus der Logarithmentafel die Mantisse 0.18808. Danach wird die Mantisse zum Numerus 154,3 $\triangleq$ 0.18837 ermittelt. Nun ist die Interpolation erforderlich. Die Differenz der Mantissen beträgt 29. Nach der angegebenen Beziehung muß man zur Mantisse 0.18808 $2{,}9 \cdot 5$ addieren. Die Kennziffer von 15425 ist 4. Darauf folgt der Logarithmus von 15425 — 4.18822.

Beispiel 10

Ermittle den Logarithmus von 100245!

Die Tafel läßt nur den Numerus 100,2 zu. Die Mantisse ist 0.00087. Auch in diesem Fall müßte interpoliert werden, wobei man die vorletzte Zahl nach oben aufrundet, da die letzte Zahl eine 5 ist. Auf das Vorgehen bei der Interpolation kann jetzt verzichtet werden. Die Kennziffer ist 5, somit ergibt sich der Logarithmus von 100245 ≙ 5.00109.

Beispiel 11

Es sind folgende Zahlen als Potenzen von 10 darzustellen:

3100, 9526, 7,2.

Aus den Erklärungen ergibt sich, daß man von den Zahlen den Logarithmus suchen muß. Danach ist dieser als Potenzexponent zur Basis 10 anzugeben.

Zum Aufsuchen der Mantissen wird eine 5stellige Logarithmentafel verwendet. Für überschlägige Ermittlungen kann man auch den Rechenschieber, die Tafel im Anhang oder die Darstellung nach Bild 3 verwenden.

lg 3100 ist 3.49136, also die Potenz $10^{3.49136}$;

lg 9526 ist 3.97891, also die Potenz $10^{3.97891}$;

lg 7,2 ist 0.85733, also die Potenz $10^{0.85733}$.

Beispiel 12

Welcher Numerus ergibt sich aus den Potenzen $10^{3.47712}$; $10^{2.27875}$; $10^{0.90309} - 1$?

Man sucht in der Tafel die Mantisse auf. Die Kennziffer gibt die Stellenzahl an. Für die jeweilige Potenz lautet der entsprechende Numerus der

— ersten Potenz: 3000,

— zweiten Potenz: 190,

— dritten Potenz: 0,8.

Beispiel 13

Bestimme zu den nachstehenden Logarithmen die Zahlen (Numeri):

$$\lg a + \lg b - \lg c; \; m \lg b + n \lg a; \; \frac{\lg b + \frac{1}{m} \lg a}{n}.$$

Anwendung der Logarithmengesetze:

$$\frac{a \cdot b}{c}$$

$$b^m \cdot a^n$$

$$\sqrt[n]{b \cdot \sqrt[m]{a}}$$

Beispiel 14

Logarithmiere folgende Ausdrücke:

$$\lg \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\lg \frac{b}{\sqrt[n]{a}}$$

$$\lg \sqrt[m]{\frac{a^n \, b^s}{b^r \sqrt[r]{c^n \sqrt[s]{a^m}}}}$$

Anwendung der Logarithmengesetze:

$$m (\lg a - \lg b)$$

$$\lg b - \frac{1}{n} \lg a$$

$$\frac{1}{m} \left[\left(n \lg a + \frac{s}{r} \lg b\right) - \left(r \lg b + \frac{n}{p} \lg c + \frac{m}{sp} \lg a\right)\right]$$

Beispiel 15

Löse folgende praktische Aufgaben mit Logarithmen:

a) $\dfrac{288,7}{25,923 \cdot 8,3247}$

Man sucht die Mantissen der angegebenen Zahlen und bestimmt die Kennziffern. Es ergibt sich dann:

$\lg 288,7 = 2.45045$
$\lg 25,923 = 1.43385$
$\lg 8,3247 = 0.92037$

Nach den Rechenregeln wird $2.45045 - (1.43385 + 0.92037) = 0.09623$. Die Kennziffer ist Null, also liegt die Zahl zwischen 0 und 10. Man sucht nun in der Tafel zu der errechneten Mantisse den Numerus; der beträgt **1248**. Da die Kennziffer Null ist, ergibt sich 1,248.

b) $\dfrac{1}{0,74839 \cdot 85,184}$

Die Logarithmen der Zahlen sind:

$\lg 1 = 0.0$

$\lg 0,74839 = 0.87413 - 1$

$\lg 85,184 = 1.93087$

Deshalb wird $0.0 - (0.87413 - 1 + 1.93087)$
$0.0 - 1.80500.$

Da bekanntlich k nur die Stellenzahl angibt, muß man zur Lösung der Aufgabe einen „Rechenkniff" anwenden, um die Mantisse dieser Differenz zu ermitteln. Am Ergebnis ändert sich nichts, wenn man statt 0.0 den Wert $1.00000 - 1$ schreibt. Damit wird $1.00000 - 1 - (0.80500 - 1) = 0.19500 - 2$.

Die Mantisse 0.19500 hat den Numerus 1567. Da $k = -2$ ist, erhält man als Ergebnis der Aufgabe die Zahl 0,01567.

c) $\dfrac{1,7944^6}{3,5327^5}$

$\lg 1,7944^6 = 6\,(0.25382)$
$\lg 3,5327^5 = 5\,(0.54810)$

Damit ist 6 (0.25382) – 5 (0.54810) = 0.77822 – 2.

Zur Mantisse 0.77822 erhält man die Zahl 6001.

Da k = –2 ist, lautet das Ergebnis 0,06001.

d) $(8{,}1243 \cdot 10^{-3})^3$

lg 8,1243 = 0.90974, also 3 · 0.90974 = 2.72922;

lg 10 = 1.00000, also –9 · 1.00000 = –9.00000;

somit ist

2.72922 + (–9.00000) = 0.72922 – 7.

Die Zahl 5362 hat die Mantisse 0.72922. Da k = –7 ist, gilt als Ergebnis 0,0000005362.

e) $\dfrac{9{,}3264^2}{\sqrt[3]{39{,}75\sqrt{1{,}609}}}$

lg 9,3264 = 0.96970 und 2 · 0,96970 = 1.93940;

lg 39,75 = 1.59934;

lg 1,609 = 0.20656 und 0,5 · 0.20656 = 0.10328.

Damit ist 1.93940 – 0,333 (1.59934 + 0.10328) = 1.37765.

Zur Mantisse 0.37765 gehört die Zahl 2386. Da k = 1 ist, erhält man als Ergebnis 23,86.

Beispiel 16

Wie groß ist der natürliche Logarithmus von 27,3?
Der dekadische Logarithmus von 27,3 ist 1.43616. Mit Gl. (30) ergibt sich:

ln 27,3 = 2,3026 · 1.43616 = 3.3

Wie heißt der dekadische Logarithmus zum natürlichen Logarithmus 3.40120?

Mit Gl. (30) errechnet man:

0,4343 · 3.40120 = 1.47714

Beim Aufsuchen der Mantisse in der Tafel findet man die Zahl 3000; weil k = 1, entspricht die Zahl 30 dem Ergebnis.

3. Gleichungen

In diesem Abschnitt sind die Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten, quadratischen sowie gemischtquadratischen Gleichungen beschrieben. Dabei wird vorausgesetzt, daß einige allgemeine Rechenoperationen (z. B. die Bruchrechnung) beherrscht werden.

Was versteht man unter einer Gleichung?

Eine Gleichung ist ein Ausdruck, der angibt, daß zwei Größen einander gleich sein sollen. Man unterteilt die Gleichungen in identische Gleichungen und Bestimmungsgleichungen. Bei identischen Gleichungen gilt: Die eine Seite ist nur die Umformung der anderen (z. B. $a = a$ oder $3x + 6x = 9x$). Eine Bestimmungsgleichung ist nur dann erfüllt, wenn sie für einen Wert oder für einige besondere Werte der in ihr enthaltenen Größen richtig bleibt. Die in einer solchen Gleichung vorkommenden Größen, denen man besondere Werte geben muß, damit die beiden Seiten der Gleichung einander gleich sind, werden die *Unbekannten* genannt. Die Einteilung der Bestimmungsgleichungen erfolgt:

- nach der Anzahl der Unbekannten,
- nach der höchsten Potenz der Unbekannten.

Danach gibt es beispielsweise Gleichungen mit einer, mit zwei oder n Unbekannten und Gleichungen ersten, zweiten oder m-ten Grades. Man nennt die letztgenannten auch lineare oder quadratische Gleichungen. Nicht alle Aufgaben liegen sofort in Form einer Gleichung vor. Zur Lösung derartiger Aufgaben muß man einen Ansatz bilden (Textaufgaben). Damit diese leichter gelöst werden können, muß man Möglichkeiten des Ansatzes üben. Darüber hinaus gibt es eine Anzahl von Formeln, die dem ungeübten Amateur dann Schwierigkeiten bereiten, wenn er nicht erkennt, wie man mit den Formeln rechnen kann bzw. wie sie umzustellen sind. Die folgenden Ausführun-

gen sollen dem Amateur helfen, sich die entsprechenden Fähigkeiten anzueignen.

3.1. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

In der Mathematik benutzt man die letzten Buchstaben des Alphabets zur Kennzeichnung von Unbekannten (x, y, z). Enthält die Gleichung nur eine Unbekannte, so wird sie mit x bezeichnet. In den Beziehungen, wie sie in den Bänden 21, 52 und 68, *Formelsammlung für den Funkamateur*, Teil I bis III, angegeben sind, ist diese Unbekannte statt x beispielsweise R (der ohmsche Widerstand) oder U (die Spannung) usw. Die Lösung obengenannter Gleichung besteht darin, daß auf der einen Seite (meistens die linke Seite) die Unbekannte x, auf der anderen Seite der Gleichung die bekannten Größen stehen. Eine Gleichung mit einer Unbekannten wäre z. B. $2x + 2 = 4$. Nach der Umformung ergibt sich für $x = 1$. Die Probe für die Richtigkeit des Ergebnisses von x erfolgt durch Einsetzen des gefundenen Wertes für x. Man erhält dann eine identische Gleichung (denn $2 \cdot 1 + 2 = 4$).

Nun zu den Arten und Lösungsmitteln der Gleichung mit einer Unbekannten.

Ist die Unbekannte ein *Summand*

$$x + a = b, \tag{35}$$

so subtrahiert man beide Seiten der Gleichung mit $-a$:

$$x + a - a = b - a$$
$$x = b - a$$

Ist die Unbekannte ein *Minuend*

$$x - a = b, \tag{36}$$

dann wird auf beiden Seiten der Gleichung a addiert:

$$x - a + a = b + a$$
$$x = b + a = a + b$$

Man würde auch dann das gleiche Ergebnis erhalten, wenn man in Gl. (35) und Gl. (36) a mit dem entsprechenden Vorzeichen auf die andere Seite der Gleichung gebracht hätte.

Ist die Unbekannte ein *Subtrahend*

$$a - x = b, \tag{37}$$

so bringt man x mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite. In gleicher Weise verfährt man mit b:

$$a = x + b \text{ und } a - b = x$$

Das gleiche Ergebnis läßt sich errechnen, wenn man Gl. (37) auf beiden Seiten mit -1 multipliziert (jedes Glied mit -1 multiplizieren):

$$-a + x = -b \text{ und } x = a - b$$

Ist die Unbekannte ein *Faktor*

$$a \cdot x = b, \tag{38}$$

so werden beide Seiten der Gleichung durch a dividiert:

$$\frac{a}{a} x = \frac{b}{a}, \text{ also } x = \frac{b}{a}$$

Ist die Unbekannte ein *Dividend*

$$\frac{x}{a} = b, \tag{39}$$

dann sind beide Seiten der Gleichung mit a zu multiplizieren:

$$a \cdot \frac{x}{a} = a \cdot b$$

und

$$x = a \cdot b$$

Besteht die Unbekannte aus einem *Divisor*

$$\frac{a}{x} = b, \tag{40}$$

so werden beide Seiten der Gleichung mit x multipliziert und anschließend durch b dividiert:

$$x \cdot \frac{a}{x} = x \cdot b$$

und

$$\frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{b}$$

Also ist:

$$\frac{a}{b} = x$$

Das gleiche Ergebnis läßt sich erreichen, wenn man auf beiden Seiten den reziproken Wert einsetzt und danach mit a multipliziert:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{b}$$

und

$$x = \frac{a}{b}$$

Daraus ist ersichtlich, auf welcher Seite der Gleichung x steht; es müssen nur die Vorzeichen beachtet werden. Kommen in den Gleichungen *keine Brüche* vor und steht die Unbekannte nicht in einer *Klammer*, dann werden alle bekannten Glieder auf die eine Seite, die die Unbekannte enthaltenen Glieder auf die andere Seite gebracht. Schließlich dividiert man die gesamte Gleichung durch den Koeffizienten der Unbekannten.

Beispiel

$$ax - bx = a^2 - b^2$$

$$x(a - b) = a^2 - b^2$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$5\,x + 4 = 2\,x + 31$$

$$5\,x - 2\,x = 31 - 4 = 27, \text{ also } x = \frac{27}{3} = 9$$

Kommt die Unbekannte in einer *Klammer* vor, so sind die Klammern aufzulösen. Dann kann man entsprechend der Gl. (35) bis Gl. (40) vorgehen.

Beispiel

$$(3\,x - 1)\,(4\,x - 19) = 2\,(2\,x - 3)\,(3\,x - 14)$$
$$12\,x^2 - 57\,x - 4\,x + 19 = 12\,x^2 - 56\,x - 18\,x + 84$$
$$12\,x^2 - 12\,x^2 - 61\,x + 74\,x = 84 - 19 = 65$$
$$13\,x = 65, \text{ somit } x = 5$$

Kommt die Unbekannte als *Bruch* vor, dann beseitigt man die Brüche, indem Glied für Glied mit dem Hauptnenner multipliziert wird. Dann ist die Gleichung auf die vorstehend beschriebenen Verfahren zurückgeführt.

Beispiel

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 14$$

$$x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = x\,\frac{7}{12} = 14$$

$$x = \frac{14}{7} \cdot 12 = 24$$

$$\frac{1}{2}(x - 3) - \frac{1}{3}(2x - 5) = \frac{1}{5}(x + 3) - \frac{1}{6}(5x - 17)$$

$$\frac{3(x - 3) - 2(2x - 5)}{6} = \frac{6(x + 3) - 5(5x - 17)}{30}$$

$$5[3(x - 3) - 2(2x - 5)] = 6(x + 3) - 5(5x - 17)$$

$$15x - 45 - 20x + 50 = -19x + 103$$

$$14x = 98$$

$$x = 7$$

Wurzelgleichungen mit einer Unbekannten

Einer solchen Gleichung sieht man oft nicht sofort an, ob es sich um eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten handelt.

Zunächst ist die Wurzel zu beseitigen. Dazu wird die Gleichung auf beiden Seiten potenziert. Es entfällt damit die Wurzel.

Beispiel

$$\sqrt{x^2 + 11} = x + 1$$

$$\left(\sqrt{(x^2 + 11)}\right)^2 = (x + 1)^2$$

$$x^2 + 11 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

3.1.1. Grafische Lösung der Gleichung mit einer Unbekannten

Man bringt die Gleichung auf die Form:

$$a\,x + b = 0 \tag{41}$$

Diesen Ausdruck setzt man gleich y. Die auf diese Weise erhaltene Funktionsgleichung stellt eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem dar (Bild 4). Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse ist der Lösungswert der gegebenen Gleichung. Zur Darstellung sind lediglich 2 Punkte erforderlich (z. B. x = 0 und ein anderer passender Wert von x).

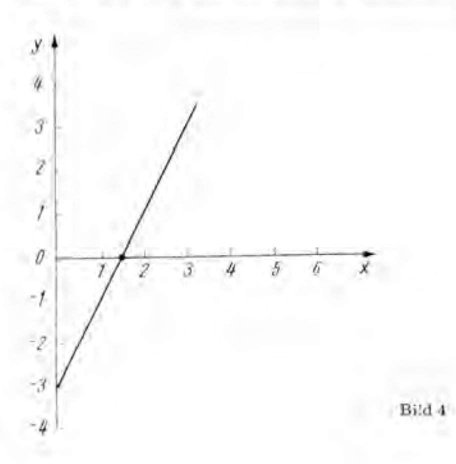


Bild 4

Beispiel

$9\,(x - 2) = 7\,(x + 1) - 22$
$9\,x - 18 = 7\,x + 7 - 22$
$2\,x - 3 = 0 = y$

Mit Gl. (41) erhält man für a = 2 und b = −3. Für x = 0 ist y = −3; für x = 2 ergibt sich y = 1. Wenn die Werte in das Koordinatensystem übertragen und die Punkte verbunden sind, erhält man die Gerade. Der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse ergibt x = 1,5 als Lösungswert.

3.2. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

Hat man eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten (x, y), so gibt es unendlich viele Wertepaare dieser Unbekannten, die die Gleichung erfüllen. Um eine Eindeutigkeit zu erhalten, muß man soviel unabhängige Gleichungen haben, wie Unbekannte existieren; bei zwei Unbekannten demnach auch zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax + by &= c_1 \\ dx + ey &= c_2 \end{aligned} \tag{41a}$$

Es gibt nur ein einziges Wertepaar der beiden Unbekannten, das beiden Gleichungen genügt. Bei der Lösung solcher Aufgaben verbindet man beide Gleichungen so miteinander, daß eine Unbekannte eliminiert wird. Dann hat man eine Gleichung mit einer Unbekannten. Nachstehend folgen einige Lösungsverfahren.

3.2.1. Additions- und Subtraktionsmethode

Jede Gleichung ist auf die Normalform

$$ax + by = c \tag{42}$$

zu bringen. Man betrachte nun die mit den Unbekannten verbundenen Faktoren. Durch geeignete Multiplikation erreicht man, daß die Faktoren einer Unbekannten beider Gleichungen den gleichen Wert haben. Jetzt kann man, je nach Vorzeichen der Unbekannten, beide Gleichungen addieren oder subtrahieren. Dadurch wird eine Unbekannte eliminiert. Die auf diese Weise erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten läßt sich nach den Verfahren des Abschnitts 3.1. lösen. Ihren Wert setzt man in eine der Gleichungen ein und löst nach der anderen Unbekannten auf. Somit erhält man die Lösungswerte beider Unbekannten.

Beispiel

$$2x - 3y = 18 \qquad \text{(a)}$$
$$4x - 12y = 24 \qquad \text{(b)}$$

Gl. (a) wird mit 2 multipliziert:

$4x - 6y = 36$

Gl. (b) wird von Gl. (a) subtrahiert:

$$\begin{array}{l} 4x - 6y = 36 \\ -4x - 12y = 34 \\ \hline -6y + 12y = 36 - 24 = 12 \end{array} \qquad 6y = 12, \text{ also } y = 2$$

$y = 2$ wird in Gl. (a) oder Gl. (b) eingesetzt; zum Beispiel in Gl. (a):

$2x - 3 \cdot 2 = 18$ und $2x = 24$, also $x = 12$

Man kann auch Gl. (a) mit 4 multiplizieren und von der erhaltenen Gleichung Gl. (b) abziehen. Es ist ersichtlich, daß sich bei der Subtraktion die Vorzeichen ändern:

$$\begin{array}{l} 8x - 12y = 72 \\ 4x - 12y = 24 \\ \hline 4x = 48 \text{ und } x = 12 \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{array}{l} 5x + 7y = 73 \\ 5x - 7y = 17 \\ \hline \end{array}$$

Da in beiden Gleichungen die Faktoren bei y gleich sind, kann wegen der entgegengesetzten Vorzeichen sofort addiert werden. Die Addition ergibt $10x = 90$, also $x = 9$. In eine der Gleichungen wird $x = 9$ eingesetzt. $45 + 7y = 73$, daraus ergibt sich $7y = 28$; $y = 4$.

3.2.2. Gleichsetzungsmethode

Beide Gleichungen sind auf die Normalform zu bringen. Danach ist jede Gleichung nach einer Unbekannten aufzulösen. Natürlich muß es die gleiche Unbekannte sein. Dann setzt man beide Gleichungen gleich.

Beispiel

$$\begin{array}{l} 2x - 7y = 5 \\ 5x - 9y = 21 \end{array}$$

Beide Gleichungen, nach **x** aufgelöst, ergeben:

$$x = \frac{5 + 7\,y}{2} \qquad x = \frac{21 + 9\,y}{5}$$

$$\frac{5 + 7\,y}{2} = \frac{21 + 9\,y}{5}$$

Die Gleichung wird wechselseitig mit 2 bzw. 5 multipliziert:

$25 + 35\,y = 42 + 18\,y$ Daraus ergibt sich $y = 1$.

$$x = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

3.2.3. Einsetzungsmethode

Eine der auf die Normalform gebrachten Gleichungen wird nach einer Unbekannten aufgelöst. Danach ist dieser Wert für die gleiche Unbekannte in die andere Gleichung einzusetzen. Man erhält somit eine Gleichung mit einer Unbekannten. Es ist dann, wie beschrieben, zu verfahren.

Beispiel

$$5\,x + 2\,y = 58$$
$$7\,x - 3\,y = 29$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x = \frac{58 - 2\,y}{5}$. Diesen Wert setzt man für x in die zweite Gleichung ein:

$$7\,\frac{(58 - 2\,y)}{5} - 3\,y = 29$$

$7\,(58 - 2\,y) - 15\,y = 145$, somit $-29\,y = -261$

$y = 9$

$$x = \frac{58 - 18}{5} = 6$$

3.2.4. Grafische Lösung

$3x + 4y = 12$

$2x + 6y = 15$

Jede der Gleichungen im Koordinatensystem ist eine Gerade. Man bestimmt für jede der Gleichungen die Achsenabschnitte. In der ersten Gleichung ist für $y = 0$ $x = 4$, für $x = 0$ $y = 3$. In der zweiten Gleichung ist für $y = 0$ $x = 7{,}5$, für $x = 0$ $y = 2{,}5$. Verbindet man die Achsenabschnitte der entsprechenden Gleichungen, so erhält man die genannten Geraden. Der Schnittpunkt beider Geraden ist die Lösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten. In Bild 5 ist die Lösung für $x = 1{,}2$ und $y = 2{,}1$ dargestellt.

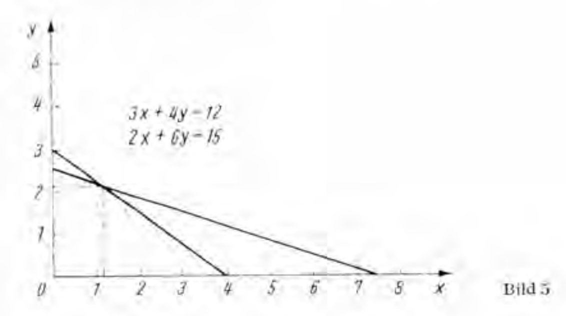


Bild 5

3.3. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten

Zunächst sei die allgemeine Form der quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten angegeben:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{43}$$

Die unten angeführten Kriterien lassen erkennen, ob es sich um eine reinquadratische oder um eine gemischtquadratische Gleichung handelt. Dividiert man Gl. (43) mit A, so ergibt sich

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

oder, wenn B/A = a, C/A = b gesetzt wird, dann entsteht die Normalform

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{44}$$

x^2 = quadratisches Glied;
ax = lineares Glied;
a = Koeffizient des linearen Gliedes;
b = absolutes Glied.

3.3.1. Die reinquadratische Gleichung

Ist $a = 0$, d. h., das lineare Glied entfällt, so wird

$$x^2 + b = 0 \tag{45}$$

die reinquadratische Gleichung.

Es soll nur der Fall betrachtet werden, wenn $b < 0$ (negativ) ist, da sonst die Wurzeln der Gleichung imaginär sind. Unter der genannten Voraussetzung ergibt sich:

$$x_{1,2} = \pm b \tag{46}$$

Hat man $b = 0$, so ist:

$$x^2 + ax = 0$$

oder $$x(x + a) = 0 \tag{47}$$

Bei einem Produkt mit dem Wert 0 muß einer der Faktoren 0 sein, daher ist:

$x_1 = 0,\ x_2 = -a$

Beispiel

$dx^2 + e = ex^2 + d$

Bemerkung

Man sollte sich nicht von den angegebenen Buchstaben in der Gleichung irreführen lassen. Das Ziel besteht darin, die Gleichung auf die vorhin gezeigten Formen zurückzuführen. Wer mit den Rechenoperationen vertraut ist, wird z. B. e und das mit x^2 behaftete Glied aus der obengenannten Gleichung auf die andere Seite bringen. In diesem Fall soll zur Veranschaulichung der umständliche Weg gezeigt werden.

Es ist:

$x^2(d - e) + (e - d) = 0$

Man erhält somit eine Gleichung entsprechend der Form Gl. (45), wobei b = (e − d) ist. Unter den dort angegebenen Voraussetzungen wird

$$x^2 = \frac{d - e}{d - e} = 1, \text{ demnach } x_{1,2} = \pm 1.$$

$x_{1,2}$ heißen die beiden Lösungen oder Wurzeln der Gleichung.

$$\frac{\sqrt{6 + x^2} + x}{\sqrt{6 + x^2} + x} = \frac{3}{2}$$

$$2\left(\sqrt{6 + x^2} + x\right) = 3\left(\sqrt{6 + x^2} - x\right)$$

$$2\sqrt{6 + x^2} - 3\sqrt{6 + x^2} = -2x - 3x$$

$$6 + x^2 = 25x^2 \text{ (daraus ergibt sich } -24x^2 + 6 = 0;$$

$$\text{somit ist also } x^2 - \frac{6}{24} = 0)$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

3.3.2. Die gemischtquadratische Gleichung

Sind gemäß Gl. (44) a und b ungleich 0, so handelt es sich um eine gemischtquadratische Gleichung. Um gemischtquadratische Gleichungen zu erkennen, muß man ebenso wie bei den vorangegangenen Beispielen eine Aufgabe soweit lösen, bis die vorstehend angegebenen Kriterien für die Gleichung erfüllt werden. Unter dieser Voraussetzung sind die Wurzeln oder die Lösungen für die Unbekannte:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{(a)^2}{4} - b} \\ x_2 &= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \end{aligned} \tag{48}$$

Zum Radikanden soll folgendes erwähnt werden:

Ist $\left[\frac{a^2}{4} - b\right] > 0$, also $b < \frac{a^2}{4}$, dann hat die Gleichung zwei reelle Wurzeln. Für $b = \frac{a^2}{4}$ erhält man die gleiche Lösung wie für x_1 und x_2. Ist aber $b > \frac{a^2}{4}$, so ergeben sich für x zwei konjugiert komplexe Lösungen (s. Abschnitt 4.).

3.3.2.1. Grafische Lösung

Man setzt Gl. (44) wie bei den vorherigen Lösungen gleich y und hat damit die Funktionsgleichung (Bild 6). Ähnlich der reinquadratischen Gleichung erhält man ebenfalls eine Parabel. Ihre Lage im Koordinatensystem hängt vom Radikanden

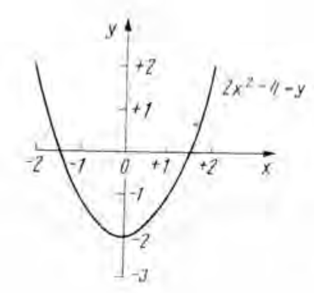


Bild 6

nach Gl. (48) ab. Komplexe Wurzeln der Gleichung lassen sich auf grafischem Wege nicht bestimmen. Zur Darstellung einer gemischtquadratischen Gleichung fertigt man sich am besten eine Wertetabelle an, in der bei verschiedenen x-Werten die dazugehörigen y-Werte aufgeschrieben werden.

Beispiel

Bestimme die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 2x - 1 = 0$ auf grafischem Wege! Die Gleichung hat bereits die allgemeine Form; man setzt sie gleich y. Die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse ergeben die Wurzeln (Lösung der Gleichung). Nachstehend die Wertetabelle (s. Bild 7):

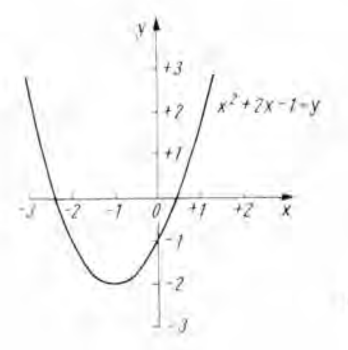


Bild 7

x	y
0	−1
1	+2
−1	−2
−0,5	−1,75
−1,5	−1,75
−2	−1

Je feiner man die Kurve abstuft, um so genauer wird die Kurve. Trägt man die Werte entsprechend Bild 7 ein, so ist die Parabel im Koordinatensystem zu erkennen. Ihre Schnittpunkte mit der x-Achse sind $x_1 = 0{,}414$; $x_2 = -2{,}414$. Zum gleichen Ergebnis kommt man auf analytischem Weg.

Beispiel 17

$$9x + 13 - 6x - 17 = 12x + 23 - 3x - 29$$

Man bringt die x-behafteten Glieder auf die linke, die x-freien Glieder auf die rechte Seite:

$3x - 9x = 4 - 6$ oder $-6x = -2$, also $x = \frac{1}{3}$.

Beispiel 18

$$\frac{5}{x-1} = \frac{6}{x+1}$$

Zuerst wechselseitig mit $x - 1$ bzw. $x + 1$ multiplizieren, dann die Glieder ordnen. Danach wie in der vorhergehenden Aufgabe verfahren:

$$5(x+1) = 6(x-1)$$

$5x + 5 = 6x - 6$ oder $5x - 6x = -6 - 5$, damit $x = 11$

Beispiel 19

$$\frac{m\left(x + \frac{nr}{m} - r\right)}{nx} + \frac{n\left(x + \frac{mr}{n} - r\right)}{mx} = 2$$

Der Bruch auf der linken Seite erhält einen gemeinsamen Hauptnenner. Danach wird dieser Nenner auf die andere Seite der Gleichung gebracht. Die Klammern sind auszumultiplizieren. Die weitere Ausrechnung erfolgt, wie vorher gezeigt:

$$m^2x\left(x + \frac{nr}{m} - r\right) + n^2x\left(x + \frac{mr}{n} - r\right) = 2\,nmx^2$$

$$m^2x + nmr - m^2r + n^2x + mrn - rn^2 = 2\,nmx$$

$$x(m^2 + n^2 - 2\,nm) = r(m^2 + n^2 - 2\,nm)$$

$$x = r$$

Beispiel 20

Mehrere Freunde haben eine Rechnung zu begleichen; jeder von ihnen soll 8,50 M zahlen. 2 verfügen jedoch über kein Geld, so daß sich der Betrag für die anderen Freunde um 3,40 M erhöht. Wieviel Freunde bezahlen?
Die Anzahl der Freunde ist unbekannt, demnach x. Die zu zahlende Summe beträgt x · 8,50 M; sie verändert sich nicht. Deshalb setzt man sie gleich der geringeren Personenanzahl mit deren höherem Betrag. In einer Gleichung fixiert, ergibt sich:

$(x - 2)(8{,}5 + 3{,}4) = 8{,}5\,x$
$11{,}9\,x - 23{,}8 = 8{,}5\,x$, somit ist $3{,}4\,x = 23{,}8$ und $x = 7$
7 Freunde bezahlen die Rechnung.

Beispiel 21

4 Personen müssen 4400 M so untereinander teilen, daß A doppelt soviel wie B und noch 50 M bekommt. B erhält dreimal soviel wie C und noch 100 M mehr, D aber soviel wie A, B und C zusammen. Wieviel bekommt jede Person?
Man schreibt nach den Angaben die Summe für jede Person auf und setzt sie in die Gleichung der 4 Personen ein. Dann eliminiert man weiter, bis schließlich noch die Summe für eine Person übrigbleibt. Damit erhält man die Summe für die erste Person. Die Summen der anderen Personen lassen sich nun einfach berechnen.

$A + B + C + D = 4400$
$A = 2\,B + 50 \qquad B = 3\,C + 100 \qquad D = A + B + C$

Eingesetzt wird:

$(2\,B + 50) + (3\,C + 100) + C + (A + B + C) = 4400$
$(2\,B + 50) + (3\,C + 100) + C = 2200$
$6\,C + 4\,C + 200 + 150 = 2200 \qquad 10\,C = 1850$

Damit ist C = 185 M, B = 655 M, A = 1360 M, D = 2200 M.

Beispiele zur Gleichung mit zwei Unbekannten

Beispiel 22

$9\,x - 10\,y = 23$
$6\,x \quad 5\,y = 22$

Die zweite Gleichung ist mit 2 zu multiplizieren und danach von der oberen abzuziehen:

$$
\begin{array}{r}
9x - 10y = 23 \\
12x - 10y = 44 \\
\hline
-3x = -21 \quad x = 7
\end{array}
$$

Diesen Wert in eine der gegebenen Gleichungen eingesetzt, ergibt für die erste Gleichung:

$$63 - 10y = 23$$

$$y = 4$$

Beispiel 23

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{x + a}{y + b} = \frac{a^2}{b^2}$$

Man wendet die Einsetzungsmethode an, indem aus der ersten Gleichung $x = y\frac{a}{b}$ in die zweite Gleichung eingesetzt wird.

Durch wechselseitige Multiplikation ergibt sich:

$y\frac{a}{b} + a = \frac{a^2}{b^2}(y + b)$, daraus $y\frac{(b - a)}{b} = a - b$;

damit ist $y = \frac{b(a - b)}{b - a}$, und durch Einsetzen von y in die erste Gleichung wird schließlich $x = \frac{a(a - b)}{b - a}$.

Beispiel 24

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = a - b$$

$$\frac{b}{x} + \frac{a}{y} = a + b$$

Es werden zunächst die Brüche beseitigt. Dann wendet man am zweckmäßigsten die Gleichsetzungsmethode an. Beide Gleichungen löst man z. B. nach y auf:

$ay - bx = xy (a - b)$
$by + ax = xy (a + b)$

Aus der ersten Gleichung wird $y = \frac{bx}{(a - ax + bx)}$;

die zweite Gleichung ergibt $y = -\frac{ax}{(b - ax - bx)}$.

Beide Ausdrücke setzt man gleich:

$$\frac{b}{(a - ax + bx)} = -\frac{a}{(b - ax - bx)}$$

oder $b (b - ax - bx) = - a (a - ax + bx)$

Durch Umformen ergibt sich:

$x (a^2 + b^2) = a^2 + b^2$, also $x = 1$ sowie $y = 1$.

Beispiele zur reinquadratischen Gleichung

Beispiel 25

$(3 x + 1) (2 x - 3) - (4 x - 3) (x - 1) = 12$

Die Klammern löst man durch Ausmultiplizieren auf. Danach werden die Glieder geordnet. Dann wird die Gleichung mit Gl. (46) verglichen.

$6 x^2 - 9 x + 2 x - 3 - (4 x^2 - 4 x - 3 x + 3) = 12;$
$2 x^2 - 9 = 0$, somit ist $x_{1,2} = \pm 3$.

Beispiel 26

$$\frac{b - 1}{x} + x = bx$$

Man beseitigt den Bruch und ordnet die Glieder, dann wird mit Gl. (46) verglichen:

$b - 1 + x^2 = bx^2$ und $x^2 (1 - b) + (b - 1) = 0$

$$x^2 + \frac{(b - 1)}{(1 - b)} = 0$$

$$x^2 = \frac{1 - b}{1 - b} = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Beispiel 27

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

Es ist der Bruch zu beseitigen und zu ordnen:

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}-(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x^2}$$

$$2\sqrt{1-x^2} = 1$$

Nun wird auf beiden Seiten potenziert:

$$4\,(1-x^2) = 1$$

Daraus ergibt sich $-4\,x^2 + 3 = 0$ oder $x^2 = \frac{3}{4}$, somit ist

$x_{1,2} = \pm\, 0{,}866.$

Beispiele zur gemischtquadratischen Gleichung

Beispiel 28

$$x^2 - 5\,x = 150$$

Nach Gl. (48) ist $a = -5$ und $b = -150$. Damit wird:

$$x_1 = 2{,}5 + \sqrt{\frac{25}{4} + 150} = 15$$

$$x_2 = 2{,}5 - \sqrt{\frac{25}{4} + 150} = -\,10$$

Beispiel 29

$$(3\,x + 5)\,(x + 2) + (2\,x + 5)\,(3 + x) = 8$$

Die Klammern sind durch Multiplikation aufzulösen. Danach werden die Glieder geordnet. Mit Gl. (48) ergibt sich:

$$3\,x^2 + 6\,x + 5\,x + 10 + 2\,x^2 + 6\,x + 5\,x + 15 = 8$$

oder $\quad 5\,x^2 + 22\,x + 7 = 0$

Damit ist:

$$x_1 = -\,2{,}2 + \sqrt{\frac{19{,}4}{4} - 1{,}4} = -\,0{,}34$$

$$x_2 = -\,2{,}2 - \sqrt{\frac{19{,}4}{4} - 1{,}4} = -\,4{,}06$$

Beispiel 30

$$\frac{2}{3x+1} + \frac{1}{3x-1} = -\frac{5}{4}$$

Man beseitigt die Brüche und ordnet die Glieder. Dann wird wie bei den vorstehenden Beispielen verfahren:

$$2(3x-1) + (3x+1) = -\frac{5}{4}(9x^2-1)$$

$$9x - 1 = -\frac{45}{4}x^2 + \frac{5}{4}$$

$$\frac{45}{4}x^2 + 9x - \frac{9}{4} = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$x^2 + \frac{4x}{5} - \frac{1}{5} = 0$$

$$x_1 = -\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{16}{25 \cdot 4} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = -\frac{2}{5} - \sqrt{\frac{16}{25 \cdot 4} + \frac{1}{5}} = -1$$

4. Rechnen mit komplexen Zahlen

Oft kommt der Funkamateur mit Vorgängen der Wechselstromtechnik in Berührung, die ihm nur mit komplexen Rechnungen verständlich werden. Durch Anwendung der komplexen Rechnung kann man viele Aufgaben auf den entsprechenden Gebieten lösen.

4.1. Imaginäre Zahlen

Es ist nicht möglich, eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen. Das kann man z. B. beim Radikanden -2 ersehen, denn sowohl $+1{,}414^2$ wie auch $-1{,}414^2$ ergeben $+2$. Eine solche nichtmögliche Zahl (eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl) heißt *imaginäre* Zahl.

Die Einheit dieser imaginären Zahl ist $\sqrt{-1} = i$. Um Verwechslungen mit dem Augenblickswert des Wechselstroms i auszuschließen, hat man in der Elektrotechnik statt i den Buchstaben j gewählt, $\sqrt{-1} = j$. Diese Bezeichnung wird im folgenden angewendet.

4.1.1. Rechenregeln mit imaginären Zahlen

Wenn $\sqrt{-1} = j$, so ist $j^2 = -1$. Dazu gelten für Potenzen von j:

Die Potenz einer imaginären Zahl ist bei geradem Exponenten eine reelle Zahl, dagegen bei ungeradem Exponenten eine imaginäre Zahl.

$$\left.\begin{array}{ll}
j^0 = 1 & j^{-1} = \dfrac{1}{j} = -j \quad \left(\dfrac{1}{j} = \dfrac{j^4}{j} = j^3 = -j\right) \\
j^1 = j & j^{-2} = -1 \\
j^2 = -1 & j^{-3} = j \\
j^3 = -j & j^{-4} = 1 \\
j^4 = 1 &
\end{array}\right\} \qquad (49)$$

Das Produkt von imaginären Zahlen ergibt bei einer geraden Zahl von Faktoren eine reelle Zahl, dagegen bei einer ungeraden Zahl der imaginären Faktoren wieder eine imaginäre Zahl:

$$\sqrt{-a}\,\sqrt{-b} = j\sqrt{a}\cdot j\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \tag{50}$$

Der Quotient aus zwei imaginären Zahlen ist eine reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{-a}{-b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \tag{51}$$

Die Summe oder Differenz zweier imaginärer Zahlen ergibt wieder eine imaginäre Zahl:

$$\sqrt{-a} \pm \sqrt{-b} = j\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right) \tag{52}$$

4.2. Komplexe Zahlen

Wenn man in der *Gaußschen* Zahlenebene eine Zahl a + jb darstellt, so geschieht das entsprechend Bild 8. Die x-Achse der kartesischen Koordinaten ist in diesem Fall die reelle Achse, die y-Achse dagegen die imaginäre Achse. Die genannte

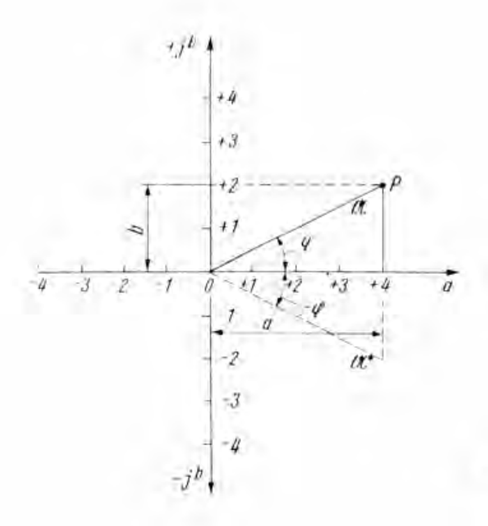


Bild 8

Zahl heißt komplexe Zahl. Sie setzt sich demnach aus der reellen Zahl a (oder der reellen Komponente) und der imaginären Zahl jb (also der imaginären Komponente) zusammen. Entsprechend Bild 8 ist a = 4 und jb = 2. Die komplexe Zahl ist die allgemeinste Zahl. Ihre Bezeichnung erfolgt mit deutschen Buchstaben:

$$\mathfrak{A} = \mathrm{a} + \mathrm{jb} \tag{53}$$

In der Elektrotechnik verwendet man aber statt $\mathfrak{A} \triangleq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$ usw. Um den Leser mit den Symbolen der Elektrotechnik vertraut zu machen, wird im folgenden mit $\mathfrak{R}$ gerechnet. Ist in Gl. (53) a = 0, so handelt es sich um eine imaginäre Zahl, dagegen bei b = 0 um eine reelle Zahl. Eine komplexe Zahl, die sich nur im Vorzeichen von der imaginären Zahl unterscheidet, heißt *konjugiert komplex* (Bild 8):

$$\mathfrak{A}^* = \mathrm{a} - \mathrm{jb} \tag{54}$$

Komplexe Zahlen sind auch in Polarkoordinaten darstellbar (Bild 9). Es ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \mathrm{R}\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \\ &= \mathrm{R}\,(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi) \end{aligned} \tag{55}$$

mit $\mathrm{R} = +\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$

und $\cos\varphi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}} \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{R}} \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$

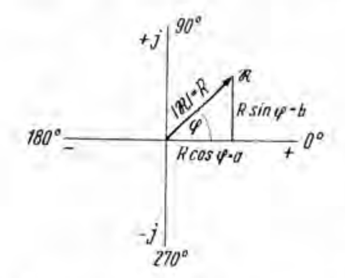


Bild 9

Entsprechend der Reihenentwicklung kann man

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} &= \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi \end{aligned} \tag{56}$$

setzen. Daraus ist zu ersehen, daß besonders durch Exponentialschreibweise das Rechnen mit komplexen Zahlen übersichtlicher wird. Gemäß Gl. (53) und Gl. (54) würde man dann wie folgt schreiben:

$$\mathfrak{R} = R\, e^{j\varphi} \text{ und } \mathfrak{R}^* = R\, e^{-j\varphi} \tag{57}$$

Für den Betrag von $\mathfrak{R}$ kann man $|\mathfrak{R}|$ schreiben oder wie in Gl. (55) R. Die e-Funktion stellt den Winkelfaktor dar. Man kann also eine komplexe Zahl folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{R} = a + jb = R\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R\, e^{j\varphi} \tag{58}$$

Der Phasenwinkel stellt den Winkel der komplexen Zahl gegen die reelle Achse dar.

Tabelle 2 Einige charakteristische Werte von φ

φ	Winkelfaktor
$0° = 0$	$e^{j0} = e^0 = 1$
$90° \triangleq \frac{\pi}{2}$	$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$
$180° \triangleq \pi$	$e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1 = j^2$
$270° \triangleq \frac{3\pi}{2}$	$e^{j\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2} = -j$
$360° \triangleq 2\pi = 2n\pi$	$e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j\sin 2\pi = 1 = e^{j2n\pi}$

n = Zahl der Umläufe

4.2.1. Rechenregeln mit komplexen Zahlen

4.2.1.1. Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 \pm \mathfrak{R}_2 &= (r_1 + jb_1) \pm (r_2 + jb_2)\\ &= r_1 \pm r_2 + j(b_1 \pm b_2)\end{aligned} \tag{59}$$

Setzt man $r_0 = r_1 \pm r_2$ sowie $b_0 = b_1 \pm b_2$,

dann ist auch

$$\mathfrak{R}_1 \pm \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_0 = r_0 + jb_0.$$

Der Betrag wird $R_0 = r_0^2 + b_0^2$, (60)

mit dem tan des Phasenwinkels

$$\tan \varphi_0 = \frac{b_0}{r_0} . \tag{61}$$

Schreibt man schließlich

$r_1 = R_1 \cos \varphi_1 \quad b_1 = R_1 \sin \varphi_1 \quad r_2 = R_2 \cos \varphi_2 \quad b_2 = R_2 \sin \varphi_2,$

dann ist

$$\begin{aligned} \Re_1 \pm \Re_2 &= (R_1 \cos \varphi_1 \pm R_2 \cos \varphi_2) \\ &+ j\,(R_1 \sin \varphi_1 \pm R_2 \sin \varphi_2) = R_0 e^{j\varphi}. \end{aligned} \tag{62}$$

Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt stets eine reelle Zahl:

$$\Re_1 + \Re_1^* = (r_1 + jb_1) + (r_1 - jb_1) = 2\, r_1 \tag{63}$$

Die Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt eine imaginäre Zahl:

$$\Re_1 - \Re_1^* = (r_1 + jb_1) - (r_1 - jb_1) = 2\, jb \tag{64}$$

4.2.1.2. Multiplikation und Division von komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} \Re_1 \cdot \Re_2 &= (r_1 \pm jb_1)(r_2 \pm jb_2) \\ &= (r_1 r_2 - b_1 b_2) \pm j\,(r_1 b_2 + r_2 b_1) \qquad (65) \\ &= R_1 R_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad (66) \\ &= R_1 R_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Der Betrag des Produkts zweier komplexer Zahlen ist:

$$\Re_1 \Re_2 = R_p = \sqrt{(r_1 r_2 - b_1 b_2)^2 + (r_1 b_2 + r_2 b_1)^2} \tag{67}$$

sowie der

$$\tan \varphi_p = \frac{r_1 b_2 + r_2 b_1}{r_1 r_2 - b_1 b_2} = \tan(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{68}$$

Bei der Division erhält man:

$$\Re_1 : \Re_2 = \frac{r_1 + jb_1}{r_2 + jb_2} = \frac{r_1 r_2 + b_1 b_2}{r_2^2 + b_2^2} - j\,\frac{r_1 b_2 - r_2 b_1}{r_2^2 + b_2^2} \tag{69}$$

$$= \frac{R_1 (\cos \varphi_1 + j\sin \varphi_2)}{R_2 (\cos \varphi_2 + j\sin \varphi_2)}$$

$$= \frac{R_1}{R_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin (\varphi_1 - \varphi_2)] \tag{70}$$

$$= \frac{R_1}{R_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{71}$$

Der Betrag des Quotienten ist:

$$\left| \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2} \right| = R_Q$$

$$= \frac{1}{r_2^2 + b_2^2} \sqrt{(r_1 r_2 + b_1 b_2)^2 + (r_1 b_2 - r_2 b_1)^2} \tag{72}$$

für $\qquad \tan \varphi_Q = \frac{r_1 b_2 - r_2 b_1}{r_1 r_2 + b_1 b_2} \qquad (73)$

als $\qquad \varphi_Q = \varphi_1 - \varphi_2$

Aus Gl. (69) ist ersichtlich, wie man den Nenner eines komplexen Bruches reell machen kann. Nachstehend nochmals die ausführliche Gleichung:

$$\frac{r_1 + jb_1}{r_2 \pm jb_2} = \frac{(r_1 + jb_1)(r_2 \mp jb_2)}{(r_r \pm jb_2)(r_2 \mp jb_2)}$$

$$= \frac{r_1 r_2 \pm b_1 b_2 + j(b_1 r_2 \mp r_1 b_2)}{r_2^2 + b_2^2} \tag{74}$$

Man kann nun noch Realteil und Imaginärteil der neuen komplexen Zahl wie in Gl. (69) darstellen. Die Gleichung wird noch übersichtlicher, wenn man nach der Rechnung die neue Zahl wie folgt schreibt:

$$\frac{r_1 + jb_1}{r_2 + jb_2} = r + jb$$

Demnach ist:

$$r = \frac{r_1 r_2 + b_1 b_2}{r_2^2 + b_2^2} \text{ bzw. } b = \frac{b_1 r_2 - r_1 b_2}{r_2^2 + b_2^2}$$

4.2.1.3. Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

$$(r \pm jb)^2 = (r^2 - b^2) \pm 2\,jrb$$
$$(r \pm jb)^3 = (r^3 - 3\,rb^2) \pm j\,(3\,r^2b - b^3) \tag{75}$$

oder

$$\mathfrak{R}^n = R^n\,(\cos n\,\varphi \pm j\sin\varphi) = R^n e^{\pm jn\varphi} \tag{76}$$

$$\sqrt{r \pm jb} = \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + b^2} + r}{2}} \pm j\sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + b^2} - r}{2}} \tag{77}$$

Man kann auch schreiben:

$$\sqrt[n]{\mathfrak{R}} = R^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} \pm j\sin\frac{\varphi}{n}\right) = R^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi}{n}} \tag{78}$$

Das Logarithmieren geschieht am besten mit der Exponentialform. Wenn

$\mathfrak{R} = R\,e^{j\varphi}$,

dann ist

$$\ln\mathfrak{R} = \ln R + \ln e^{j\varphi} = \ln R + j\,\varphi. \tag{79}$$

Beispiele zu imaginären und komplexen Zahlen

Beispiel 31

$\sqrt{-4} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt[4]{-81}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = j\sqrt{4} = 2\,j$; $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2^3} = -2$

$\sqrt[4]{-81} = \sqrt{\sqrt{-81}} = \sqrt{j}\,9 = 3\sqrt{j}$

Somit ist der obere Summand gleich $2\,j - 2 + 3\sqrt{j}$.

Beispiel 32

Welchen Wert hat $\sqrt{-j^4}$?

$\sqrt{-j^4} \triangleq \sqrt{-1}\cdot j^4 = j^2\sqrt{-1} = -1\sqrt{j}$

Beispiel 33

Es ist $\sqrt{j}$ auf die Form $r + jb$ zu bringen.

Man setzt $\sqrt{j} = r + jb$; durch Auflösen der Wurzel auf der linken Seite ergibt sich $j = r^2 - b^2 + 2\,brj$.

Werden nun Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung verglichen, dann ist $r^2 - b^2 = 0$ (da auf der linken Seite kein Realteil steht). Ferner ist $1 = 2\,br$, da auf der linken Seite der Gleichung j steht. Aus der letzten Beziehung ergaben sich $b = \frac{1}{2\,r}$ und $b^2 = \frac{1}{4\,r^2}$.

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, dann wird $r^2 - \frac{1}{4\,r^2} = 0$, also $r^4 = \frac{1}{4}$ und $r^2 = \pm\frac{1}{2}$; daraus ergibt sich $r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da $b = \frac{1}{2\,r}$ war, erhält man schließlich für $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Danach ist:

$$\sqrt{j} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$$

Beispiel 34

Welchen Betrag und welchen Winkel hat der Quotient $\frac{1 + 2\,j}{2 - 3\,j}$?

Außerdem ist das Ergebnis in der Polar- und in der Exponentialform darzustellen!

Mit Anwendung von Gl. (74) wird:

$$\frac{1 + 2\,j}{2 - 3\,j} = \frac{2 - 6 + j\,(4 + 3)}{4 + 9} = \frac{-4 + 7\,j}{13}$$
$$= -0{,}308 + 0{,}538\,j$$

Damit sind Real- und Imaginärteil bekannt.

Aus Gl. (61) oder Gl. (71) ergibt sich $\tan\varphi = \frac{0{,}538}{-0{,}308} = -1{,}75$.

Nach der Tafel für trigonometrische Funktionen ist damit $\varphi \approx -60^\circ$. Als Betrag der komplexen Zahl erhält man $R = \sqrt{0{,}308^2 + 0{,}538^2} = 0{,}62$. Der Quotient in der Polarform ist somit $\frac{1 + 2\,j}{2 - 3\,j} = 0{,}62\,(\cos 60^\circ - j\sin 60^\circ)$ und in der Exponentialform $0{,}62\,e^{-j\,60^\circ}$.

Beispiel 35

Der Wellenwiderstand einer Leitung ist allgemein:

$$\mathfrak{Z} = \frac{r' + j\,\omega\,L'}{G' + j\,\omega\,C'}$$

R' = Wirkwiderstand der Leitung in $\frac{\Omega}{cm}$;

L' = Induktivität der Leitung in $\frac{H}{cm}$;

G' = Querableitung der Leitung in $\frac{1}{\Omega cm}$;

C' = Kapazität der Leitung in $\frac{F}{cm}$.

Diese Angaben beziehen sich auf eine bestimmte Strecke der Leitung (in diesem Fall je cm).

Es soll mit dieser Aufgabe bewiesen werden, daß bei hohen Frequenzen sowohl R' wie G' unberücksichtigt bleiben können. Trotzdem wird zur Übung das Beispiel mit folgenden Angaben durchgerechnet: $R' = 0{,}05\,\Omega/cm$, $G' = 10^{-6}\,1/\Omega cm$, $L' = 2{,}5\,nH/cm$, $C' = 1\,pF/cm$, $f = 145\,MHz$.

Setzt man die gegebenen Werte in $\mathfrak{Z}^2$ ein, so erhält man:

$$\mathfrak{Z}^2 = \frac{5 \cdot 10^{-2} + j\,6{,}28 \cdot 1{,}45 \cdot 10^8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-9}}{10^{-6} + j\,6{,}28 \cdot 1{,}45 \cdot 10^8 \cdot 10^{-12}} = \frac{2000 - 42{,}7\,j}{10^{-6} + 0{,}81}$$

$$\mathfrak{Z}^2 = 2500 - 52{,}7\,j$$

Es ist zu erkennen, daß der Realteil überwiegt. Deshalb kann der Imaginärteil vernachlässigt werden, so daß man für

$\mathfrak{Z} = 50\,\Omega$ erhält. Das gleiche Ergebnis läßt sich mit $Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ erreichen (wird in der UKW-Technik angewendet).

Beispiel 36

Wie groß ist der Scheinwiderstand bei der Reihenschaltung einer Kapazität von $C = 1\,\mu F$ und eines Wirkwiderstands von $100\,\Omega$ bei 1000 Hz? Berechne ferner Wirk-, Blind- und Scheinleistung, wenn die anliegende effektive Spannung 100 V beträgt!

Auch in diesem Fall läßt sich die komplexe Rechnung anwenden. Die erforderlichen Formeln sind aus Band 21 dieser Reihe, *Formelsammlung für den Funkamateur*, Teil I, zu ersehen. Der Scheinwiderstand einer Reihenschaltung von R und C ist:

$$\mathfrak{R} = r + \frac{1}{j\,\omega\,C} = r - \frac{j}{\omega\,C}$$

Eingesetzt wird:

$$\mathfrak{R} = 100 - \frac{j}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = 100\,\Omega - j\,159\,\Omega$$

Der Betrag des Scheinwiderstands ist:

$$R = \sqrt{100^2 + 159^2} = 188\,\Omega$$

Für den Phasenwinkel ergibt sich $\tan\varphi = -\frac{159}{100}$,

also $\varphi \approx -59°$.

Der Scheinstrom ist $I_s = \frac{U}{R} = \frac{100}{188} = 0{,}532$ A.

Damit erhält man für die Scheinleistung $P_s = 100 \cdot 0{,}532 = 53{,}2$ VA.

Für die Wirkleistung ergibt sich $P_w = P_s \cos 59° = 27{,}5$ W.

Die Blindleistung beträgt $P_B = P_s \sin 59° = 45{,}2$ VA.

4.3. Weitere Anwendungen

Befindet sich beispielsweise in einem Wechselstromkreis eine Reihenschaltung mehrerer komplexer Widerstände, so kann man die Real- und Imaginärteile getrennt addieren:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots + \mathfrak{R}_n = (r_1 \pm rb_1) \\ &\quad + (r_2 \pm jb_2) + \ldots + (r_2 \pm jb_n) \\ &= r_1 \pm r_2 \pm \ldots r_2 \pm j\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \end{aligned} \tag{80}$$

Das Ergebnis der Addition ist wieder ein komplexer Widerstand $\mathfrak{R}^+ = r^+ + jb^+$. Eine Reihenschaltung aus Wirk- und Blindwiderstand $\mathfrak{R} = r + jb$ kann man in eine äquivalente Parallelschaltung umrechnen, d. h., an den Klemmen des komplexen Reihen- und Parallelwiderstands fällt die gleiche Spannung ab.

4.3.1. Umwandlung von Reihen- in Parallelschaltung und umgekehrt

Bild 10 zeigt die entsprechenden Schaltungen. Auf Grund der Zweckmäßigkeit rechnet man bei Parallelschaltungen mit Leitwerten. Danach gilt:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mathfrak{G}} \tag{81}$$

oder

$$r + jb = \frac{1}{g + jp} \tag{82}$$

Berechnet man nun diesen Bruch gemäß Gl. (74), so wird:

$$r + jb = \frac{g - jp}{g^2 + p^2} \tag{83}$$

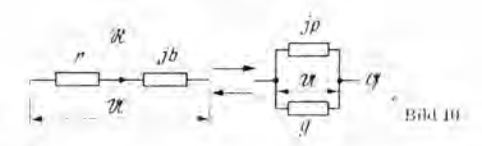


Bild 10

Durch Vergleich auf beiden Seiten der Gleichung ist:

$$r = \frac{g}{g^2 + p^2} \qquad b = -\frac{p}{g^2 + p^2} \tag{84}$$

Ähnliche Beziehungen erhält man, wenn man g und p berechnen möchte:

$$g + jp = \frac{1}{r + jb}, \tag{85}$$

also $$g = \frac{r}{r^2 + p^2} \qquad p = -\frac{b}{r^2 + b^2}$$

4.4. Einige Leitungsprobleme

Die vom UKW-Amateur zu lösenden Leitungsprobleme setzen ein gutes fachliches Wissen voraus. Die weiteren Ausführungen sind deshalb unter diesem Aspekt zu sehen. Trotzdem soll versucht werden, diese Thematik auch für den Anfänger verständlich darzustellen, da sich aus den theoretischen Beziehungen wichtige Schlußfolgerungen für die Praxis ergeben.
Im Handbuch *Amateurfunk* ist ein Indikator beschrieben, der eine Abtastung des Spannungsverlaufes auf Leitungen ermöglicht. Bild 11 zeigt das Prinzip der Abtastung von Leitungen. Auf der rechten Seite befindet sich der Generator, links liegen der Abschlußwiderstand sowie die jeweils betrachtete Leitungslänge x. So ist z. B. bei $x = 0$ der Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_{ab}$ und bei $x = L$ der Anfang der Leitung. Der Widerstand, den man am Anfang der Leitung mißt, heißt Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_{ei}$. Aus den geometrischen Abmessungen und den sonstigen Eigenschaften der Leitung ergibt sich der Wellenwiderstand Z. Bekanntlich bilden sich stehende Wellen auf der Leitung, wenn $\mathfrak{R}_{ab} \neq Z$ ist. Aus den Maxima und Minima der stehenden Wellen kann man Rückschlüsse auf den Abschlußwiderstand ziehen. Zur Feststellung dieser Wellen dient der angeführte Indikator. Mit Hilfe des *Smith*-Diagramms ist es möglich, den Wert von $\mathfrak{R}_{ab}$ zu bestimmen. Weitere Anwendungen des *Smith*-Diagramms sind in Abschnitt 4.5. beschrieben. Nachstehend einige Formeln zu Leitungsproblemen.

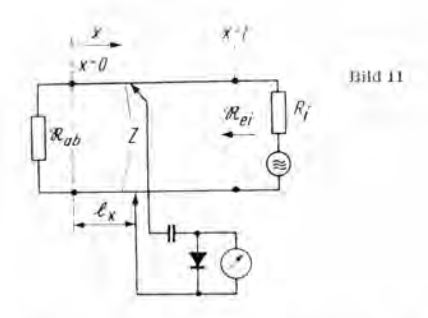


Bild 11

Nimmt eine Leitung die Leistung P_h auf, dann findet ein voller Verbrauch an $\mathfrak{R}_{ab} = Z$ statt (dabei wird vorausgesetzt, daß die Leitung selbst keine Verluste aufweist). Ist dagegen $\mathfrak{R}_{ab} \neq Z$ (keine Anpassung), so tritt eine Reflexion der Leistung ein:

$$P_r = |\mathfrak{r}|^2 P_h \tag{86}$$

Der Faktor $\mathfrak{r}$ wird mit Reflexionsfaktor bezeichnet (nicht verwechseln mit dem Realteil einer komplexen Zahl). Man kann in Verbindung mit dem soeben Erörterten ermitteln, welche Leistung an P_{ab} verbraucht wird:

$$P_{ab} = P_h (1 - |\mathfrak{r}|^2) = \frac{m}{Z} \; \frac{V^2_{max}}{Z} \tag{87}$$

Der Reflexionsfaktor berechnet sich aus:

$$|\mathfrak{r}| = \frac{s-1}{s+1} \quad s = \frac{|\mathfrak{r}| + 1}{|\mathfrak{r}| - 1} \tag{88}$$

Darin ist

$$s = \frac{U_{max}}{U_{min}} \tag{89}$$

das sogenannte Stehwellenverhältnis oder die Welligkeit. Mit Anpassungsfaktor bezeichnet man den Reziprokwert von s, also $m = 1/s$. Die Spannungen

$$\begin{aligned} U_{max} &= U_h + U_r \\ U_{min} &= U_h - U_r \end{aligned} \tag{90}$$

stellen die maximale bzw. minimale Amplitude auf der Leitung dar. Die Indizes beziehen sich wieder auf die hinlaufende oder reflektierte Spannung. In komplexer Schreibweise ist:

$$\mathfrak{r} = |\mathfrak{r}| e^{j\varphi} \tag{91}$$

oder in Verbindung mit dem Abschlußwiderstand der Leitung:

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{R}_{ab} - Z}{\mathfrak{R}_{ab} + Z} \tag{92}$$

Der Phasenwinkel ist:

$$\varphi^\circ = 180^\circ \left(\frac{4 l_x}{\lambda} - 1\right) \tag{93}$$

l_x = elektrische Länge in cm vom Ort $x = 0$ bis zum ersten Minimum ($l_x = l_{ge} \sqrt{\varepsilon}$);

l_{ge} = geometrische Länge;

ε = relative Dielektrizitätskonstante;

λ = Wellenlänge $= \frac{3 \cdot 10^{10}}{f}$ (λ in cm, f in Hz);

$\frac{l_x}{\lambda} = \frac{\varphi^\circ}{720^\circ} + 0{,}25.$

Auf Grund der Meßergebnisse ist:

$$\mathfrak{R}_{ab} = Z \frac{1 + \mathfrak{r}}{1 - \mathfrak{r}} \tag{94}$$

oder

$$\mathfrak{R}_{ab} = Z \frac{1 + \frac{1 - m}{1 + m} e^{j\varphi^\circ}}{1 - \frac{1 - m}{1 + m} e^{j\varphi^\circ}} \tag{95}$$

Schließlich ergibt sich der Eingangswiderstand zu:

$$\mathfrak{R}_{ei} = \frac{\mathfrak{R}_{ab} + jZ \tan\left(360^\circ \cdot \frac{l}{\lambda}\right)}{1 + j\frac{\mathfrak{R}_{ab}}{Z} \tan\left(360^\circ \cdot \frac{l}{\lambda}\right)} \tag{96}$$

l = elektrische Länge

4.4.1. Verschiedene Leitungslängen

Bild 12 zeigt, welche Eigenschaften eine Leitung aufweisen kann, wenn sich ihr Abschlußwiderstand oder ihre Länge ändert. Das gleiche gilt auch für Koaxialleitungen.

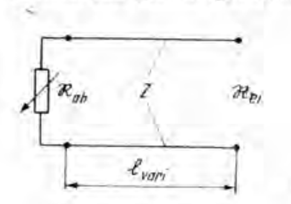


Bild 12

4.4.1.1. Die $\lambda/4$-Leitung

Es ist:

$$\mathfrak{R}_{ei} = \frac{Z^2}{\mathfrak{R}_{ab}} \tag{97}$$

$\mathfrak{R}_{ab}$ kann auch ein reeller Widerstand sein, also $\mathfrak{R}_{ab} = R$ (z. B. der Anpassungswiderstand einer in Resonanz befindlichen Antenne). Diese Leitung ist auch als $\lambda/4$-Transformator bekannt.

4.4.1.2. Die $\lambda/2$-Leitung

Es ist:

$$\mathfrak{R}_{ei} = \mathfrak{R}_{ab} \tag{98}$$

Danach findet durch die Leitung keine Transformation statt, Eingangs- und Ausgangswiderstand sind identisch. Die Leitung wird z. B. dort angewendet, wo zwischen Meßobjekt und Meßstelle ein größerer Zwischenraum zu überwinden ist.

4.4.1.3. Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_{ab} = 0$ (am Ende der Leitung ist Kurzschluß)

Der Eingangswiderstand ergibt sich jetzt zu:

$$\mathfrak{R}_{ei} = jZ \tan\left(360^\circ \frac{l}{\lambda}\right) \tag{99}$$

Aus Diagramm 1 kann man in Abhängigkeit von l/λ bei verschiedenem Z den Eingangswiderstand ersehen. Den Belangen des Amateurs entsprechend wurde nur bis nahezu $l/\lambda = 0{,}25$ gegangen. Setzt man $\Re_{ei} = j\,\omega\,L$, so läßt sich für eine gewünschte Induktivität die entsprechende Leitungslänge ermitteln. Darüber hinaus ist es auch möglich, mit einer Zusatzkapazität am Eingang der Leitung und einer bestimmten Leitungslänge Resonanz herzustellen. Wie Gl. (99) weiter erkennen läßt, wird $\Re_{ei}$ für $l/\lambda = 1/4$; $3/4$ usw. unendlich groß. Demnach hat eine am Ende kurzgeschlossene Leitung den Charakter eines Parallelschwingkreises.

Ähnliche Betrachtungen gelten in Verbindung mit Gl. (98) auch für die am Ende kurzgeschlossene $\lambda/2$-Leitung. Für $l = \lambda/2$; λ/usw. ergibt sich dann jedoch ein Serienschwingkreis. Für den Fall, daß an den Eingang der Leitung eine Kapazität angeschlossen wird, läßt sich aus Diagramm 2 die Leitungslänge ermitteln, damit Resonanz für eine gewünschte Frequenz besteht. X_c ist der kapazitive Widerstand des angeschlossenen Kondensators bei der entsprechenden Frequenz. Das Verhältnis l/λ berechnet sich nach:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{\arctan \dfrac{X_c}{Z}}{360^\circ} \tag{100}$$

4.4.1.4. Abschlußwiderstand $\Re_{ab} = \infty$ (die Leitung ist am Ende offen)

Für $\Re_{ei}$ erhält man:

$$\Re_{ei} = -\,j\,Z \cot\left(360^\circ\,\frac{l}{\lambda}\right) \tag{101}$$

Die Leitung hat für bestimmte Leitungslängen kapazitiven Charakter. Für Längen kleiner $\lambda/4$ kann man $\Re_{ei}$ aus Diagramm 3 ermitteln. Setzt man $\Re_{ei} = -j/\omega\,C$, so läßt sich die Kapazität berechnen, die sich aus einer Leitung ergibt. Auch eine offene Leitung kann man für Resonanzzwecke verwenden.

Durch Anschluß einer Induktivität an den Eingang der Leitung erhält man auch Resonanz, wenn das Verhältnis

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{\operatorname{arcot} \dfrac{X}{Z}}{360°} \tag{102}$$

eingestellt wird. Die Leitung stellt eine Kapazität dar. Die Verhältnisse $l/\lambda = 1/4; 3/4$ usw. ergeben Serienresonanz, d. h., am Eingang der Leitung ist Kurzschluß. Verlängert man die am Ende offene Leitung bis $\lambda/2$, so ergibt sich in diesem Fall wieder Parallelresonanz. Dieser kurze Überblick über Leitungslängen und Widerstandsverhältnisse sollte nur eine Anregung für ein weiteres Studium der Spezialliteratur geben.

4.5. Das Smith-Diagramm

Wie schon angedeutet wurde, kann man mit Hilfe des *Smith*-Diagramms Meßergebnisse auswerten bzw. auf grafischem Weg Aufgaben der komplexen Rechnung lösen. Die Handhabung des Diagramms erläutert Bild 13.

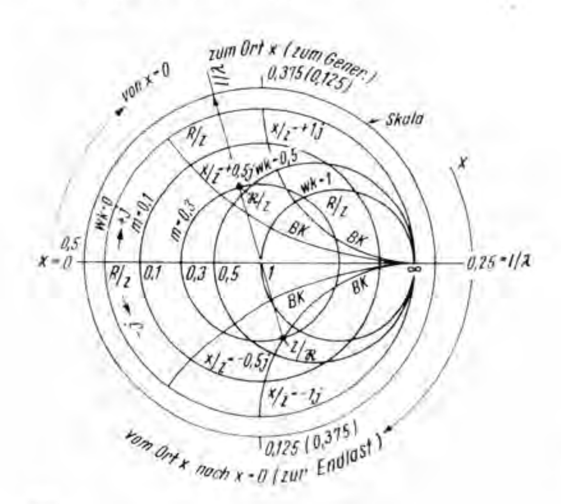


Bild 13

4.5.1. Erklärungen zum Smith-Diagramm

Beispiele 37 bis 41

Auf der waagerechten (reellen) Achse ist das Verhältnis R/Z von 0 bis ∞ aufgetragen. Man sagt auch, R ist auf Z normiert. R stellt den Wirkanteil eines komplexen Widerstands dar. Die sogenannten Wirkkreise schneiden die reelle Achse auf den angegebenen Verhältnisse R/Z. Der Wirkkreis 0 ist deshalb der äußere Kreis des Diagramms. Der Wirkkreis 1 schneidet die Achse demnach bei R/Z = 1 im Mittelpunkt; somit liegen also auf der reellen Achse alle Mittelpunkte der Wirkkreise. Den komplexen Zahlen entsprechend muß es auch Blindkreise geben. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen damit auf der imaginären Achse. Die imaginäre Achse wird nur zur Veranschaulichung erwähnt, sie erscheint also nicht im vollständigen Diagramm.

Bild 13 läßt weiterhin erkennen, daß die Blindkreise +jX/Z und −jX/Z die reelle Achse berühren. In Bild 13 sind beispielsweise +jX/Z und −jX/Z = 1 eingezeichnet; mit X wird der Blindwiderstand benannt. Des weiteren gibt es noch die m-Kreise, deren Mittelpunkte immer auf der reellen Achse bei R/Z = 1 zu finden sind, wobei m der Anpassungsfaktor ist. Es interessieren die Werte von 0 bis 1. Der m-Kreis 0 fällt mit dem Wirkkreis R/Z = 0 zusammen. Auf der äußeren Skala ist das Verhältnis l/λ von 0 bis 0,5 einmal von x = 0 zum Ort x dargestellt, oder es sind auch Wellenlängen zum Generator im Uhrzeigersinn gezeichnet. Die andere Skala verläuft entgegen dem Uhrzeigersinn vom Ort x zum Ort x = 0 (also Wellenlängen zur Endlast). Vom Mittelpunkt des Diagramms 1 ausgehend, kann man nun die Strahlen l/λ zum Schnittpunkt mit diesen äußeren Skalen bringen. In Beispielen wird die Handhabung mit diesen Strahlen näher erläutert. Der Schnittpunkt eines Strahles l_x/λ mit dem m-Kreis ergibt den normierten Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_{ab}/Z$ gemäß Gl. (95).

Durch denselben Schnittpunkt verlaufen aber auch der Wirk- und Blindkreis. Die an diese Kreise geschriebenen Zahlen braucht man nur mit Z zu multiplizieren und erhält die Komponenten von $\mathfrak{R}_{ab}$.

Hat man dagegen einen komplexen Widerstand oder Leitwert ohne Normierung vorliegen, so muß man ein geeignetes Z auswählen, um mit dem Diagramm arbeiten zu können. Nach Abschnitt 4.3.1. läßt sich der äquivalente Leitwert $Z\mathfrak{G}_{ab} = 1/\mathfrak{R}_{ab}$ zu dem vorhin errechneten komplexen Widerstand feststellen, indem der Schnittpunkt mit dem m-Kreis durch l/λ über das Zentrum 1 so weit verlängert wird, bis der Strahl wiederum den gleichen m-Kreis schneidet. Die Komponenten von $\mathfrak{G}$ ergeben sich aus dem durch diesen Schnittpunkt verlaufenden Wirk- und Blindkreis; damit kann man g und p ermitteln. An Hand der folgenden Beispiele wird der Umgang mit dem Diagramm verständlicher. Zuvor noch einige Hinweise zur Benutzung der Meßleitung. Der Indikator hat einen variablen Resonanzkreis, den man auf die gewünschte Betriebsfrequenz abstimmen kann. Der Meßschlitten (in dem sich der Indikator befindet) muß sehr präzise an der Meßleitung entlanggeführt werden. Die Meßleitung ist meist unsymmetrisch aufgebaut und hat einen Wellenwiderstand von 60 Ω. Der Meßvorgang wird so durchgeführt, daß man am Ort $x = 0$ zunächst kurzschließt und den Kreis im Indikator auf die Betriebsfrequenz abstimmt. Durch Verschieben des Meßschlittens über die Leitungslänge erkennt man, ob mehrere Minima auf der Leitung vorhanden sind. Die Abstände dieser Minima müssen genau $\lambda/2$ betragen. Man wählt die Minima zur Aussage, weil die Spannungsänderungen je Längeneinheit wesentlich größer sind als bei den Maxima. Jetzt ist der verschiebbare Maßstab so zu verändern, daß das 1. Minimum genau in $\lambda/2$-Abstand gemessen werden kann. Nach diesen Vorbereitungen wird der Kurzschluß bei $x = 0$ entfernt und der unbekannte Widerstand oder Leitwert angeschlossen. Zur Ermittlung von $\mathfrak{R}_{ab}$ müssen m und l_x bekannt sein (die Meßleitung hat praktisch $\varepsilon = 1$, also ist $l = l_{ge}$). Durch den Anschluß von $\mathfrak{R}_{ab}$ verändert sich die Lage des ersten Minimums; es beträgt l_x. Damit ist l_x/λ bekannt. Wird nun noch m ausgemessen, so kann man die beiden Werte l_x/λ und m in das Leitungsdiagramm übertragen. Die Schnittpunkte von l_x/λ und m ergeben die normierten Komponenten des gesuchten Widerstands $\mathfrak{R}_{ab}/Z$, d. h. R/Z und X/Z.

Beispiel 37

Bestimmung von $\mathfrak{R}_{ab}$ mit Hilfe der Meßleitung und des Diagramms

a) Betriebsfrequenz = 145 MHz, Z = 60 Ω; $\varepsilon = 1$. Für $\lambda = 3 \cdot 10^{10}/1{,}45 \cdot 10^8 = 207$ cm.
b) Angenommen, das 1. Minimum liegt bei 80 cm, dann ist $l_x/\lambda = 0{,}387$.
c) Nun wird m = 0,6 ermittelt.
d) Eintragen der Werte in Diagramm 3. Für den Strahl l_x/λ wählt man die Ablesung vom Ort x nach x = 0 (in Richtung zur Endlast).

m-Kreis und Strahl ergeben Schnittpunkt A. In A schneiden sich R/Z = 0,83 und +jX/Z = +j 0,43. Also ist der normierte Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_{ab}/Z = 0{,}83 + j\,0{,}43$ oder mit Berücksichtigung von Z = 60 Ω $\mathfrak{R}_{ab} = (50 + j\,25{,}8)\,\Omega$, also eine Reihenschaltung von Wirkwiderstand und Induktivität. Ähnliche Werte ergeben sich, wenn man Gl. (95) anwendet.

Beispiel 38

Eingangswiderstand einer kurzgeschlossenen Leitung

Es ist $\mathfrak{R}_{ab} = 0$ (idealer Kurzschluß).
Eine Doppelleitung habe die Länge von 10 cm, Z = 120 Ω und $\varepsilon = 2{,}5$. Die Betriebswellenlänge betrage 70 cm.

a) Bestimmen von l/λ. Man findet $l = l_{ge}\sqrt{\varepsilon} = 10 \cdot 1{,}58 = 15{,}8$ cm.
b) An der äußeren Skala ist in Richtung zum Generator vorzugehen. $l/\lambda = 15{,}8/70 = 0{,}226$. Den Strahl l/λ vom Zentrum 1 zur äußeren Skala ziehen. Da R/Z = 0 und X/Z = 0, geht man auf dem Wirkkreis R/Z = 0 so weit vor, bis der Strahl 0,226 geschnitten wird (B). Das Ergebnis ist +jX/Z = +j 6,6. Eine Wirkkomponente entfällt, da idealer Kurzschluß und verlustfreie Leitung vorausgesetzt werden. Der Eingangswiderstand ist $\mathfrak{R}_{ei} = +j\,6{,}6 \cdot 120 =$

$+j\ 790\,\Omega$ (induktiver Widerstand). Aus diesem Wert läßt sich leicht die entsprechende Induktivität berechnen.

c) Aus dem Diagramm ist zu ersehen, daß $\mathfrak{R}_{ei}$ unendlich groß wird, wenn $l/\lambda = 0{,}25$ erreicht, d. h., es handelt sich um einen Parallelschwingkreis.
   Wenn l/λ über $\lambda/4$ hinausgeht, dann stellt die Leitung eine Kapazität dar (Kurzschluß am Ende vorausgesetzt). Diese Eigenschaft bleibt bis nahezu $\lambda/2$ erhalten. Es sei nun $l/\lambda = 0{,}45$, $Z = 60\,\Omega$, $f = 500$ MHz.

Welche wirksame Kapazität ergibt sich?

a) Da die Leitung kurzgeschlossen ist, geht man wieder auf der äußeren Skala in Richtung zum Generator vor. Von 1 ist $l/\lambda = 0{,}45$ abzuziehen.
b) Da $R/Z = 0$, $X/Z = 0$, geht man zum Wirkkreis 0 und bringt diesen zum Schnitt mit $l/\lambda = 0{,}45$ (C). Damit ergibt sich der Blindkreis $-j\ 0{,}322$. Somit ist der kapazitive Widerstand $0{,}322 \cdot 60 = 19{,}3\,\Omega$.
c) Aus $X_C = 1/\omega C$ erhält man $C = 15{,}9 \cdot 10^{-2}/5 \cdot 10^8 \cdot 19{,}3 = 16{,}5$ pF.

Beispiel 39

Abschlußwiderstand und Speiseleitung

Es soll untersucht werden, welchen Eingangswiderstand man erhält, wenn die Speiseleitung zum Generator (z. B. Senderausgang) mehrere Wellenlängen lang ist.
Dazu sind nachstehende Werte bekannt: $\mathfrak{R}_{ab} = (40 + j\ 120)\,\Omega$, $\varepsilon = 4$, $l_{ge} = 10{,}3$ m, $\lambda = 2$ m.

a) Bildung von $\mathfrak{R}_{ab}/Z = 40/240 + j\ 120/240 = 0{,}166 + j\ 0{,}5$.
b) $\mathfrak{R}_{ab}/Z$ ist in das Diagramm einzutragen. Der Schnittpunkt von Wirk- und Blindkreis ergibt auch den Strahl $l_x/\lambda = 0{,}075$ (Schnittpunkt D).
c) Die Speiseleitung hat eine geometrische Länge von 10,3 m, also beträgt, da $\varepsilon = 4$, die elektrische Länge 20,6 m.

Weil $\lambda = 2$ m, ergibt sich für $l/\lambda = 10{,}3$. Im Diagramm entspricht eine Drehung um 360° einer Leitungslänge $0{,}5\ \lambda$ x. Die

Speiseleitung beträgt aber das 10,3fache der Wellenlänge. Somit erhält man 10,3 – (0,5 · ganze Umläufe), also 20 ganze Umläufe, wobei ein Rest von 0,3 Umlauf bleibt. Die Zahl der Umläufe ist nicht von Bedeutung, jedoch aber der Dezimalbruch. Deshalb braucht man nur 0,5 von der Zahl hinter dem Komma abzuziehen und hat damit den l/λ-Wert. Ist die Zahl $< 0{,}5$, dann kann man diesen Wert sofort für die weitere Berechnung verwenden. Somit ergibt sich $l/\lambda = 0{,}3$.

Nun sind die Leitungsanteile zu addieren: $l_0/\lambda = (l/\lambda \pm \mathfrak{R}_{ab}) + (l/\lambda - \text{Leitung})$ $l_0/\lambda = 0{,}075 + 0{,}3 = 0{,}375$.

d) l_0/λ ist mit dem m-Kreis zum Schnitt zu bringen. Aus den Komponenten von $\mathfrak{R}_{ab}/Z$ ergibt sich $m = 0{,}13$. Also ist der Schnittpunkt E, wobei man für $R/Z = 0{,}25$ und für $-jX/Z = 0{,}97$ erhält. Damit ist der Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_{ei} = (60 - j\,233)\,\Omega$.

Beispiel 40

Eingangswiderstand und Leitwert

Eine Leitung ist mit einem Kondensator von 5 pF und einem parallelgeschalteten Widerstand von 100 Ω abgeschlossen. Welchen Eingangswiderstand erhält man, wenn $l_{ge} = 1$ m, $Z = 60\,\Omega$, $\varepsilon = 2{,}5$ und $\lambda = 70$ cm betragen?

a) Zunächst ist die Parallelschaltung in eine äquivalente Serienschaltung zu transformieren. Dafür muß der kapazitive Leitwert berechnet werden: $p = 6{,}28 \cdot 4{,}28 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-12} = 13{,}4 \cdot 10^{-3}$ S. Somit beträgt der Gesamtleitwert $\mathfrak{G}_{ab} = (10 + j\,13{,}4)$ mS.

b) $\mathfrak{G}_{ab}$ ist zu normieren. $\mathfrak{G}_{ab} \cdot Z = 0{,}6 + j\,0{,}81$. Diese Werte sind in das Diagramm einzutragen. Zum Schnittpunkt F gehört $m = 0{,}33$.

c) Um den äquivalenten Serienwiderstand zu erhalten, ist durch F und 1 der Strahl zu ziehen und mit dem m-Kreis zum Schnitt zu bringen (G). In diesem Punkt schneiden sich Wirkkreis 0,60 und Blindkreis $-j\,0{,}77$. Demnach ist $\mathfrak{R}_{ab}/Z = 0{,}6 - j\,0{,}77$.

d) Verlängert man den Strahl zur Auffindung von $\Re_{ab}$ bis zu den äußeren Skalen, dann findet man $l/\lambda = 0{,}123$ oder $l/\lambda = 0{,}377$. Die elektrische Länge der vorgeschalteten Leitung beträgt $l = 1{,}58$ m, also $l/\lambda = 2{,}26$. Von Bedeutung ist nur 0,26. Es muß jetzt in Richtung zum Generator vorgegangen werden. Betrachtet man $l/\lambda = 0{,}123$, dann gilt: $-0{,}123 + 0{,}26 = 0{,}137$. Geht man aber von $l/\lambda = 0{,}377$ aus, so ergibt $0{,}377 + 0{,}26 = 0{,}5 + 0{,}137$. In beiden Fällen erhält man denselben Endwert. Durch $l/\lambda = 0{,}137$ und den Mittelpunkt 1 ist nun wieder der Strahl zu ziehen. Der Schnittpunkt H ($m = 0{,}33$) kennzeichnet die normierten Komponenten des Eingangswiderstands $\Re_{ei}/Z = 0{,}67 + j\,0{,}975$ oder $\Re_{ei} = (40 + j\,545)\,\Omega$. Die Parallelschaltung von C und R am Ende der Leitung ist in eine äquivalente Reihenschaltung von R und L am Eingang der Leitung transformiert worden.

Beispiel 41

Ermittle den Leitwert der Reihenschaltung zweier komplexer Widerstände $\Re_1 = (10 + j\,50)\,\Omega$ und $\Re_2 = (10 - j\,100)\,\Omega$ auf grafischem Weg!

a) Man normiert auf einen beliebigen Wellenwiderstand, z. B. $Z = 100\,\Omega$, $\Re_1/Z = 0{,}1 + j\,0{,}5$, $\Re_2/Z = 0{,}1 - j\,1$.

b) $\Re_1/Z$ ist in das Diagramm einzutragen (Schnittpunkt U). Nun addiert man entweder bei konstantem R_1/Z oder X_1/Z die Komponenten von $\Re_2/Z$. R_1/Z = konstant ergibt $X_1/Z + X_2/Z = -j\,0{,}5$ (L). Danach erhält man X_{1+2}/Z = konstant und bildet $R_1/Z + R_2/Z = 0{,}2$ W. Derselbe Wert läßt sich auch auf analytischem Weg ermitteln. Zum Schnittpunkt W gehört der m-Kreis 0,16.

c) Zur Feststellung des Leitwerts ist wieder der Strahl durch m und 1 zu legen und vom 180° abgelegenen Schnittpunkt W mit dem m-Kreis zu schneiden (X). Die Komponenten des auf diese Weise erhaltenen Leitwerts sind $Zg = 0{,}7$ und $Zp = +j\,1{,}70$.

d) Der Leitwert beträgt $\mathfrak{G} = (7 + j\,17{,}5)$ mS; das entspricht den Widerständen $\Re_p = (143 - j\,59)\,\Omega$.

5. Winkelfunktionen

Besonders im vorhergehenden Abschnitt wurde deutlich, daß in der Amateurtechnik die Winkelfunktionen eine große Rolle spielen. Auch im täglichen Leben wird die Anwendung einiger dieser Funktionen gefordert. Die nachstehende Aufstellung verzichtet auf Ableitungen; sie ist nur als Überblick zu werten. Zum tieferen Eindringen in das Gebiet muß die spezielle Fachliteratur gelesen werden.

5.1. Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Entsprechend Bild 14 bezeichnet man die Seite c mit Hypotenuse, die Seite a mit Gegenkathete und die Seite b als Ankathete. Die den genannten Seiten gegenüberliegenden Winkel nennt man γ, α, β.

Allgemein gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (103)$$

Für die Winkelfunktionen ergibt sich:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} \qquad (104)$$

Nachstehend nun einige Verbindungen der Funktionen.

Es ist: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (105)

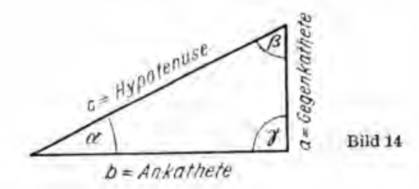


Bild 14

Daraus wird:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \tag{106}$$

Ferner:

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha} \\ \sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} \\ \operatorname{cosec}\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{108}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \tag{109}$$

5.1.1. Sätze im allgemeinen Dreieck

Von Bedeutung sind einige Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln im allgemeinen Dreieck.

Sinussatz

Im ebenen Dreieck verhalten sich je zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} &= \frac{b}{a} \\ \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} &= \frac{c}{b} \end{aligned} \tag{110}$$

Kosinussatz

Im ebenen Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma \end{aligned} \tag{111}$$

Halbwinkelsatz

Die Winkel in einem Dreieck lassen sich auch mit Hilfe der drei Seiten auf folgende Weise bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} &\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{B \cdot C}{s \cdot A}} \quad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{A \cdot C}{s \cdot B}} \\ &\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{s \cdot C}} \\ \text{mit} \quad &s = \frac{a + b + c}{2} \quad A = s - a \\ &B = s - b \\ &C = s - c \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

5.2. Winkelfunktionen im Einheitskreis

Legt man ein rechtwinkliges Dreieck so in einen Kreis, daß $c = r$ dem Radius des Einheitskreises ($r = 1$) entspricht, dann ergibt sich ein einfaches Mittel zur Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionen (Bild 15). Den Funktionswerten sind Strecken zugeordnet.

Der $\sin\alpha$ ist gleich der Maßzahl der Ordinate.
Der $\cos\alpha$ ist gleich der Maßzahl der Abszisse.
Der $\tan\alpha$ ist gleich der Maßzahl der Haupttangente.
Der $\cot\alpha$ ist gleich der Maßzahl der Nebentangente.

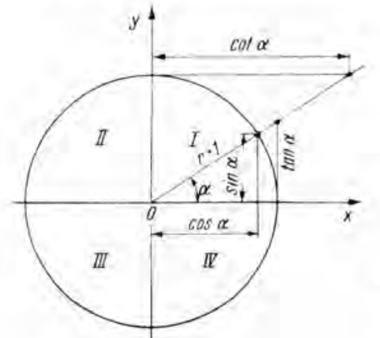


Bild 15

Des weiteren läßt Bild 15 erkennen, daß eine Darstellung der Funktion in allen 4 Quadranten möglich ist. Danach weisen trigonometrische Funktionen eine Periodizität auf:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha + k\,360^\circ) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + k\,360^\circ) = \cos\alpha \\ \tan(\alpha + k\,360^\circ) = \tan\alpha \\ \cot(\alpha + k\,180^\circ) = \cot\alpha \end{array}\right\} k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \ldots \quad (113)$$

Beispielsweise hätte ein sin 400° denselben Funktionswert wie sin 40°, denn es ist $360^\circ + 40^\circ = 400^\circ$. Die Funktionswerte kann man im Diagramm gut ablesen. Man sieht, die sin- und cos-Werte weisen einen maximalen Wert von ± 1 auf, dagegen erreichen die tan- und cot-Werte maximal bis $\pm\infty$. Nähere, d. h. genauere Werte sind aus den Tabellen für trigonometrische Funktionen zu ersehen. Außer den Gradzahlen an der Abszisse enthalten sie noch einige Angaben im Bogenmaß (werden später erläutert). In eine Tabelle zusammengefaßt, ergeben sich folgende Vorzeichen und Verläufe der Funktionen:

Tabelle 3

Quadrant	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
	steigt von 0 bis 1	fällt von 1 bis 0	steigt von 0 bis ∞	fällt von ∞ bis 0
II	+	—	—	—
	fällt von 1 bis 0	fällt von 0 bis −1	steigt von −∞ bis 0	fällt von 0 bis −∞
III	—	—	+	+
	fällt von 0 bis −1	steigt von −1 bis 0	steigt von 0 bis +∞	fällt von +∞ bis 0
IV	—	+	—	—
	steigt von −1 bis 0	steigt von 0 bis +1	steigt von −∞ bis 0	fällt von 0 bis −∞

Für oft vorkommende Funktionswerte gibt die nachstehende Aufstellung einen Überblick:

Tabelle 4

α	0°/360°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
arc	$0\ (2\pi)$	$\pi/6 =$ 0,524	$\pi/4 =$ 0,716	$\pi/3 =$ 1,047	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
sin	0	0,5	0,707	0,86	+1	0	−1
cos	+1	0,866	0,707	0,5	0	−1	0
tan	0	0,577	1	1,73	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
cot	$\pm\infty$	1,73	1	0,577	0	$\pm\infty$	0

Im folgenden wird ein Verfahren genannt, das angibt, mit welchem Winkel sich der richtige Funktionswert berechnen läßt. Abgesehen vom Vorzeichen, das aus den obenstehenden Tabellen entnommen werden kann, gilt

eine Funktion von $\left\{\begin{matrix} 90^\circ \pm \alpha^\circ \\ 270^\circ \pm \alpha^\circ \end{matrix}\right\}$ gleich der Kofunktion,

eine Funktion von $\left\{\begin{matrix} 180^\circ \pm \alpha^\circ \\ 360^\circ \pm \alpha^\circ \end{matrix}\right\}$ gleich der Funktion.

Kofunktion: cos stellt die Kofunktion zum sin dar, cot stellt die Kofunktion des tan dar. Beispielsweise ist sin (145°) = sin (180 − 35) = sin 35° oder tan 135° = tan (180 − 45) = tan (90 + 45) = cot 45 (Vorzeichen Minus, da II. Quadrant).

5.3. Beziehung zwischen Winkel und Bogen

In diesem Abschnitt wurde wiederholt vom Bogenmaß gesprochen. Im folgenden wird dieser Begriff näher erläutert. Hat man den Mittelpunktwinkel im Kreis mit dem Radius r, so gehört zu diesem Winkel der Bogen b der Länge:

$$b = \frac{r\,\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ \tag{114}$$

Dividiert man durch r, so ergibt sich das Bogenmaß des Winkels α:

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{b}{r} = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ = 1{,}75 \cdot 10^{-2}\,\alpha^\circ \tag{115}$$

Danach ergeben sich zwei Möglichkeiten, um den Winkel zu messen (Diagramm 4). In den Tabellen für trigonometrische Funktionen sind der Funktionswert und das Argument entweder im Bogen- oder Gradmaß aufgetragen. Beim Bogenmaß bestimmt man den Winkel mit Hilfe von Gl. (115). In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß bei den komplexen Zahlen die Beziehung $\varphi = \text{arc tan } X/R$ angeführt worden ist. Das ist die Umkehrfunktion von $X/R = \tan\varphi$. Hat man X/R ermittelt, so braucht man diesen Wert nur in die tan-Funktion zu übertragen und erhält damit φ.

Nun noch einige Bemerkungen zum Winkelmaß. Ein Grad ist der 90ste Teil des rechten Winkels. 1° hat 60 min (60′) und 1 min 60 s (60″). Demnach:

$1^\circ = 60' = 3600''$

Die Tabellen der trigonometrischen Funktionen unterteilen in 10′, 20′ ... oder in Dezimalstellen 0,1; 0,2 ... Die Umrechnung nimmt man wie folgt vor: (10/60) · Minuten = Dezimalstelle (z. B. 45°15′ = 45,25°). Ein Neugrad 1^g ist der 100ste Teil des rechten Winkels. Damit ergibt sich:

$1^\circ = 1{,}111^g$ oder $1^g = 0{,}9^\circ$

5.4. Weitere Zusammenhänge zwischen Winkelfunktionen und Winkeln

Eine Reihe von Beziehungen, die in der Amateurtechnik verwendet werden, enthalten Winkelfunktionen, die nicht sofort zu überblicken sind. Die nachstehende kleine Auswahl soll einen Überblick über die Winkelfunktionen geben. Die Additionstheoreme stellen dar, wie sich die trigonometrischen

Funktionen einer Summe oder Differenz der Winkel α und β aus den Funktionen der Einzelwinkel zusammensetzen.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}
\end{aligned}\right\} \qquad (116)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

$$\left.\begin{aligned}
\tan\alpha \pm \tan\beta &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\
\cot\alpha \pm \cot\beta &= \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}
\end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{1 \pm \sin(2\alpha)} \qquad (120)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha \\
&= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) \\
&2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \\
&2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\
&2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \\
&2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \\
&\tan\alpha\tan\beta = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{1}{\cot\alpha\cot\beta}
\end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\,\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\,2\,\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos\,2\,\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ \tan 2\,\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}\end{aligned}\right\}\qquad(122)$$

$$\cot 2\,\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = 0{,}5\,(\cot\alpha - \tan\alpha)\qquad(123)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\ &= 0{,}5\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right)\\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\ &= 0{,}5\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right)\\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\ \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\end{aligned}\right\}\qquad(124)$$

Beispiele zu den Winkelfunktionen

Beispiel 42

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Seite a = 10 cm, die Seite c = 30 cm lang. Wie groß sind die Winkel im Dreieck?

Nach Gl. (103) ist $\sin\alpha = \frac{10}{30} = 0{,}33$.

Aus den Tabellen über Winkelfunktionen oder mit Hilfe des Rechenschiebers erhält man für $\alpha = 19{,}5°$. Der Winkel γ beträgt 90°; somit ist $\beta = 90 - 19{,}5 = 71{,}5°$.

Beispiel 43

Am Anfang einer aufwärts führenden Verkehrsstraße weist ein Verkehrsschild auf eine Steigung von 30% hin. Unter welchem Winkel gegenüber der Horizontalen steigt die Straße?

Die Angabe von 30% Steigung besagt, daß nach 100 m aufwärts führender Straße eine Höhe von 30 m überwunden wurde. Auf das rechtwinklige Dreieck übertragen, entspricht die Länge der Straße der Hypotenuse, die Höhe der Gegenkathete. Somit

erhält man $\tan\alpha = \frac{30}{1000} = 0{,}30$ und den Winkel $\alpha = 16{,}7°$;

allgemein ist $\tan\alpha = \frac{p}{100}$ (p in %).

Beispiel 44

Von einem Dreieck sind die Seiten a = 1 m, b = 1,5 m und c = 2 m bekannt. Bestimme die Winkel in diesem Dreieck!

Gemäß Gl. (111) ist

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{2{,}25 + 4 - 1}{3 \cdot 2} = \frac{5{,}25}{6} = 0{,}875,$$

also ergibt sich für $\alpha = 29°$.

Darüber hinaus läßt sich mit Hilfe dieser Gleichung

$\cos\beta = \frac{1 + 4 - 2{,}25}{2 \cdot 2} = 0{,}688$ und damit $\beta = 47°$ errechnen.

Bekanntlich sind die Winkel in einem Dreieck 180°. Demnach ist $\gamma = 180 - 76 = 104°$.

Beispiel 45

Welchen Wert hat der Sinus des Zeitwinkels 600°?

Ein Umlauf im Einheitskreis umfaßt 360°. Daraus folgt, daß 600° weniger als 2 Umläufe ergeben. Somit ist k = 1 und der

zu betrachtende Winkel 600° − 360° = 240°. Man kann sin 240° zerlegen in 180° + 60° = 240°. Nach Abschnitt 5.2. ist sin 240° entsprechend sin 60°. Da im III. Quadranten der Winkel 240° beträgt, wird der Funktionswert negativ. Somit ist sin 240° = −0,866.

Beispiel 46

Im Gradmaß ergibt ein Winkel 75°29′. Wie wird dieser Winkel im Bogenmaß angegeben?

Zunächst wird das Winkelmaß in Dezimalstellen (Minuten) umgerechnet (10/60) · 29 = 0,483; damit ergeben sich 75,483°. Mit Hilfe von Gl. (151) erhält man $\text{arc}\,\alpha = 1{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot 75{,}483 = 1{,}32$.

Beispiel 47

Der Augenblicksstrom im Antennenkreis eines amplitudenmodulierten Senders ist:

$$i = I_h \cos \omega_h t + I_n \cos \omega_h t \cos \omega_n t$$

Welche bekannte Beziehung erhält man durch Anwenden der Gl. (120)?

Den zweiten Summanden von i kann man nach Gl. (120) umformen, und man erhält:

$$\cos \omega_h t \cos \omega_n t = \frac{1}{2} \cos (\omega_h + \omega_n)\, t + \frac{1}{2} \cos (\omega_h - \omega_n)\, t$$

Setzt man diesen Wert in die obige Beziehung ein, dann ist:

$$i = I_h \cos \omega_h t + \frac{I_n}{2} \cos (\omega_h + \omega_n)\, t + \frac{I_n}{2} \cos (\omega_h - \omega_n) t$$

I_h = Amplitude der Trägerschwingung;
I_n = Amplitude der Modulationsschwingung;
ω_h = Trägerfrequenz;
ω_n = Modulationsfrequenz.

Als Ergebnis erhält man die Trägerschwingung $I_h \cos \omega_h t$, das obere Seitenband $(I_n/2) \cos (\omega_h + \omega_n)\, t$ und das untere Seitenband $(I_n/2) \cos (\omega_h - \omega_n)\, t$.

6. Tabellen und Diagramme

Tabelle 5 Dekadischer Logarithmus der Zahlen von 1 bis 100

Numerus	Logarithmus	Numerus	Logarithmus	Numerus	Logarithmus
0	—	28	1.44716	56	1.74819
1	0.0000	29	1.46240	57	1.75587
2	0.30103	30	1.47712	58	1.76343
3	0.47712	31	1.49136	59	1.77085
4	0.60206	32	1.50515	60	1.77815
5	0.69897	33	1.51851	61	1.78533
6	0.77815	34	1.53148	62	1.79239
7	0.84510	35	1.54407	63	1.79934
8	0.90309	36	1.55630	64	1.80618
9	0.95424	37	1.56820	65	1.81291
10	1.00000	38	1.57978	66	1.81954
11	1.04139	39	1.59106	67	1.82607
12	1.07918	40	1.60206	68	1.83251
13	1.11394	41	1.61278	69	1.83885
14	1.14613	42	1.62325	70	1.84510
15	1.17609	43	1.63347	71	1.85126
16	1.20412	44	1.64345	72	1.85733
17	1.23045	45	1.65321	73	1.86332
18	1.25527	46	1.66276	74	1.86923
19	1.27875	47	1.67210	75	1.87506
20	1.30103	48	1.68124	76	1.88081
21	1.32222	49	1.69020	77	1.88649
22	1.34242	50	1.69897	78	1.89209
23	1.38021	51	1.70757	79	1.89763
24	1.38021	52	1.71600	80	1.90309
25	1.39794	53	1.72428	81	1.90849
26	1.41497	54	1.73239	82	1.91381
27	1.43136	55	1.74036	83	1.91908

Numerus	Logarithmus	Numerus	Logarithmus	Numerus	Logarithmus
84	1.92428	90	1.95424	96	1.98227
85	1.92942	91	1.95904	97	1.98677
86	1.93450	92	1.96379	98	1.99123
87	1.93952	93	1.96848	99	1.99564
88	1.94448	94	1.97313	100	2.00000
89	1.94939	95	1.97772		

Tabelle 6 Funktionswerte der Winkelfunktionen

φ°	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$	$\cot \varphi$	$\text{arc}\ \varphi^\circ$
0	0,0	1,0	0,0	—	0,0
5	0,087	0,996	0,087	11,43	0,087
10	0,174	0,985	0,176	5,67	0,174
15	0,259	0,966	0,268	3,732	0,262
20	0,342	0,940	0,364	2,747	0,349
25	0,423	0,906	0,466	2,145	0,436
30	0,50	0,866	0,577	1,732	0,524 $= \pi/6$
35	0,574	0,819	0,70	1,428	0,611
40	0,643	0,766	0,839	1,192	0,698
45	0,707	0,707	1,0	1,0	0,786 $= \pi/4$
50	0,766	0,643	1,192	0,839	0,873
55	0,819	0,574	1,428	0,70	0,96
60	0,866	0,50	1,732	0,577	1,047 $= \pi/3$
65	0,906	0,423	2,145	0,466	1,137
70	0,940	0,342	2,747	0,364	1,222
75	0,966	0,259	3,732	0,268	1,309
80	0,985	0,174	5,67	0,176	1,396
85	0,996	0,087	11,43	0,087	1,484
90	1,0	0,0	—	0,0	1,571 $= \pi/2$

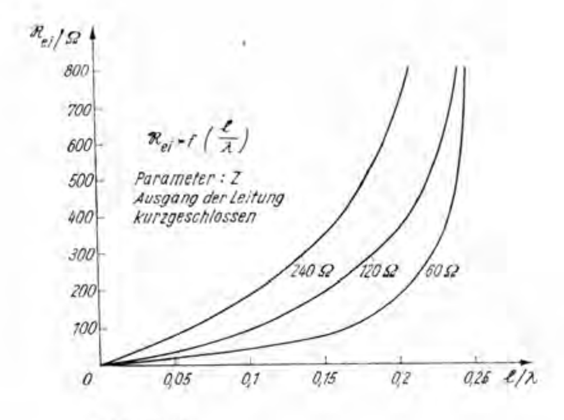


Diagramm 1

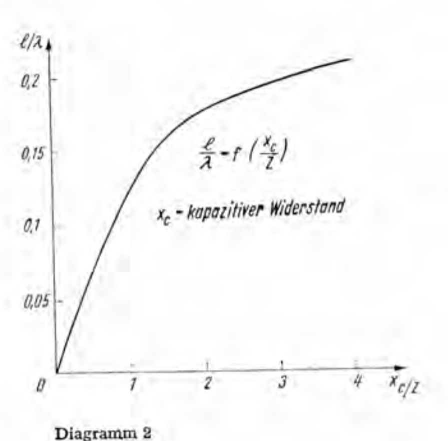


Diagramm 2

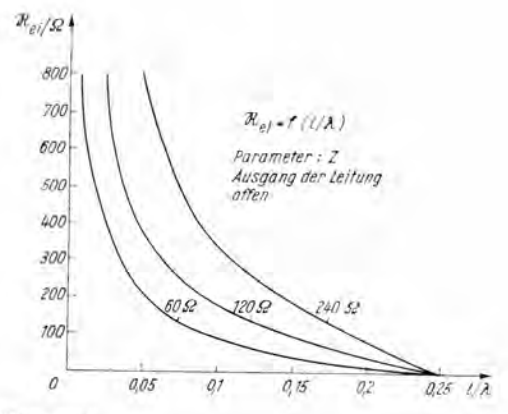


Diagramm 3

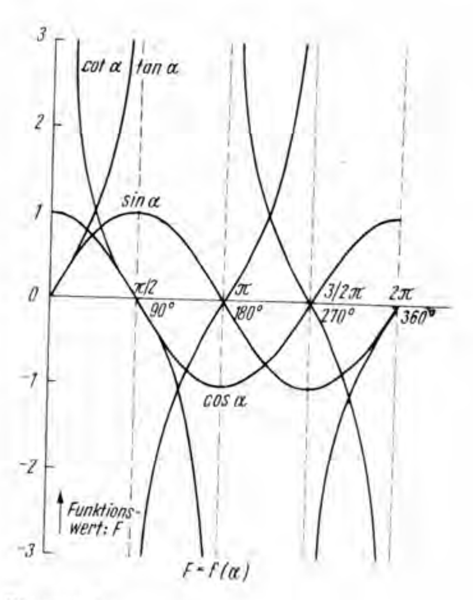


Diagramm 4

Literaturhinweise

Autorenkollektiv, *Kleine Enzyklopädie Mathematik*, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig

Brzoska/Bartsch, *Mathematische Formelsammlung*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Gobbin, *Vollständige Logarithmische und Trigonometrische Tafeln*, Verlag v. K. Wittwer, Stuttgart

Wiegner, *Algebra*, III. Heft, Dürr'sche Buchhandlung, Leipzig

Röhren- und Halbleiter, Mitteilungen, Telefunken, Ulm/Donau

Telefunken Laborbuch I, Franzis Verlag, München

Geschwinde, *Kreis- und Leitungsdiagramme*, Franzis Verlag, München

1.—15. Tausend
Deutscher Militärverlag · Berlin 1968
Lizenz-Nr. 5
Lektor: Wolfgang Stammler
Zeichnungen: Erich Böhm
Typografie: Günter Hennersdorf
Vorauskorrektor: Ingeborg Kern · Korrektor: Johanna Pulpit
Hersteller: Werner Briege
Gesamtherstellung: Druckerei Märkische Volksstimme,
Potsdam A 476
1,90 M

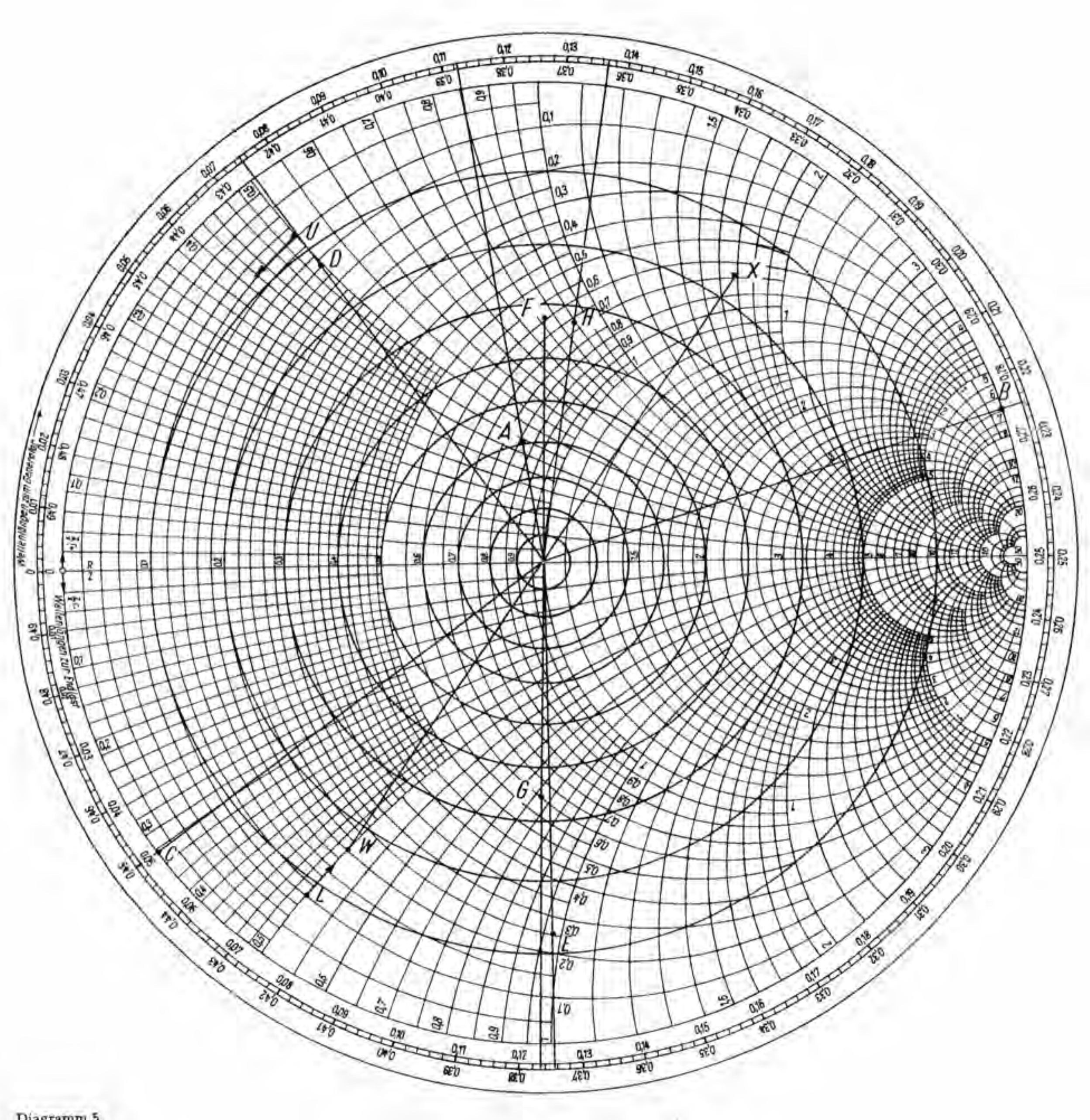


Diagramm 5



DEUTSCHER MILITÄRVERLAG